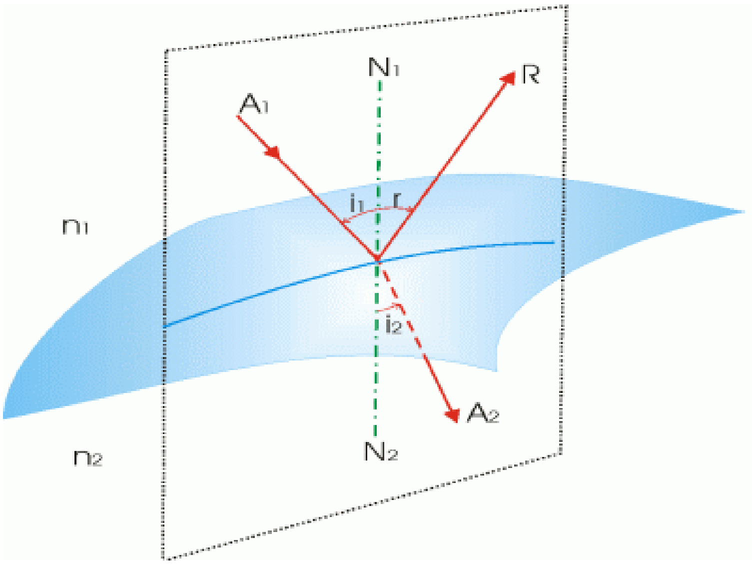
Université Mohamed 1er
Faculté des Sciences -Oujda

Filière : SMIA -S2.

Physique

Cours : Optique géométrique

Sommaire



Année : 2020-2021

Cours d'Optique

Objectif

L'objectif de ce demi- module est de donner les notions fondamentales de l'optique géométrique : marche des rayons lumineux, chemin optique, réflexion et réfraction, formation d'images, stigmatisme, aplanétisme, aberrations.

Pour illustrer ces propriétés, différents systèmes optiques sont traités: miroirs, dioptres, lentilles, association de systèmes centrés.

Une dernière partie de ce cours est réservé à l'étude de quelques instruments optiques: microscope, viseur, œil,…

Programme

- Lois générales de l'optique géométrique
- Réflexion et réfraction
- Prisme
- Dioptres plan et sphérique
- Miroirs plan et sphérique
- Lentilles épaisses et minces
- systèmes centrés
- Aberrations
- Focométrie
- Instruments optiques….

Chapitre 1

GENERALITES

1- Introduction

L'optique est l'étude des radiations électromagnétiques qu'elles soient visibles ultraviolettes ou infrarouges.

Les sources de lumières :

1. Sources primaires : soleil, lampes, bougie
2. Sources secondaires : lune, objet éclairé

Un milieu homogène est un milieu dont la composition est la même en tout point.

Un milieu isotrope est un milieu dont les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions.

Dans un milieu ***homogène*** et ***isotrope*** la lumière se propage en ligne droite : rayon de soleil qui pénètre dans une pièce sombre.

2. Double aspect de la lumière

Deux théories apparemment contradictoires ont été élaborées

1. Théorie ondulatoire

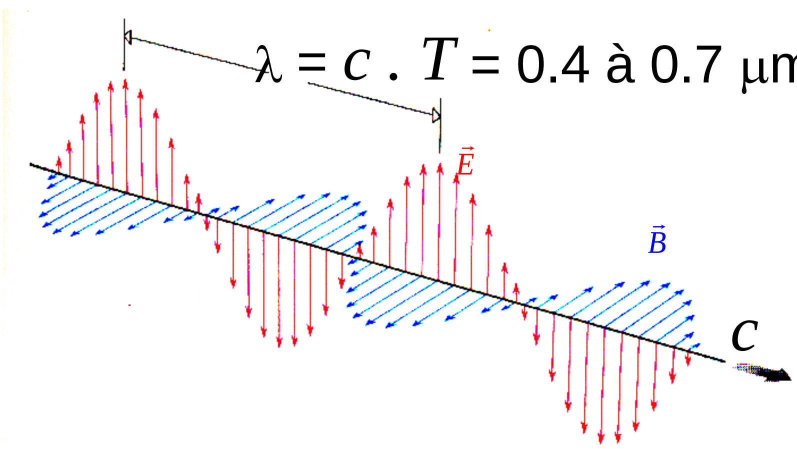
Basée sur les équations de Maxwell et considère la lumière comme une onde électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$. $\vec{E}$ Vérifie l'équation de propagation $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = V^2 \Delta \vec{E}$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ le laplacien, V vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.

La lumière est caractérisée en tant qu'onde électromagnétique par :

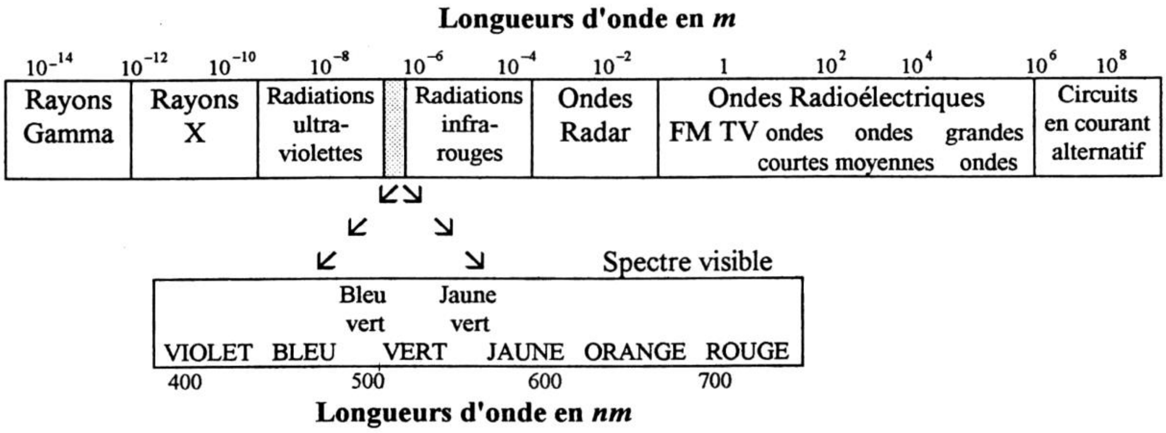
a) sa fréquence ν **:** fixée par la source et donc indépendante du milieu de propagation

b)sa longueur d'onde λ qui la distance parcourue pendant une période, dans le vide $\lambda = cT$



Cette théorie explique, les phénomènes de diffraction et d'interférences mais elle n'explique pas l'effet photoélectrique par exemple.

Ci-dessous nous donnons le spectre des ondes électromagnétiques, le domaine visible n'occupe qu'une petite partie (entre 0,4 et 0,8 μm). La superposition de toutes les radiations visibles donne la lumière blanche.



2. Théorie corpusculaire

La lumière a une structure corpusculaire (théorie de Planck) c-à-d l'énergie lumineuse ε n'est pas répartie sur l'onde mais concentrée sous forme de particules appelées ***photons*** $\varepsilon = h\upsilon$, h : constant de Planck. En 1924 Louis de Broglie montra le double aspect de la lumière : à toute particules en mouvement on associe une onde

3. Indice de réfraction

L'indice du milieu **n** est $n = \frac{c}{V}$,

C **:** est la vitesse de la lumière dans le vide, *V* est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré

Exemple

Air	$n_a \approx 1.0003$
Eau	$n_e \approx 1.33$
Verre	$n_v \approx 1.5$
Diamant	$n_d \approx 2.417$

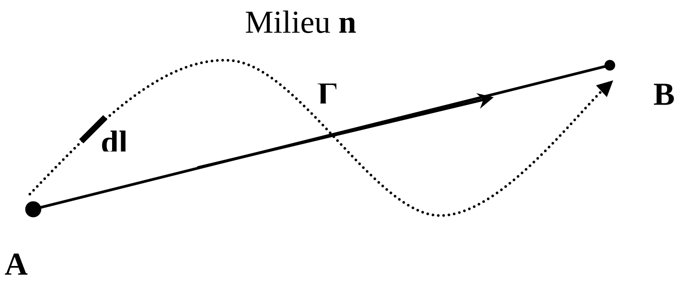
Remarque :

Comme la vitesse de propagation dépend de la fréquence des radiations $V = V(\nu)$, l'indice de réfraction dépend de la fréquence $n = n(\nu)$ sauf pour le vide où $n = 1$

4. Chemin optique

Soit Γ : courbe continue qui joigne deux points A et B d'un milieu transparent isotrope, non nécessairement homogène. On appelle le chemin optique (AB), entre les deux points A et B, le long de la courbe Γ, l'intégrale curviligne

$(AB) = \int_{\Gamma} ndl$ Où dl est un élément de longueur de la courbe Γ



Remarque : $(AB) = \int_{\Gamma} ndl = \int_{\Gamma} \frac{c}{V} dl = \int_{\Gamma} cdt = c(t_B - t_A)$

Le chemin optique n'est autre que le chemin parcourut par la lumière dans le vide pendant le temps de propagation dans le milieu considéré.

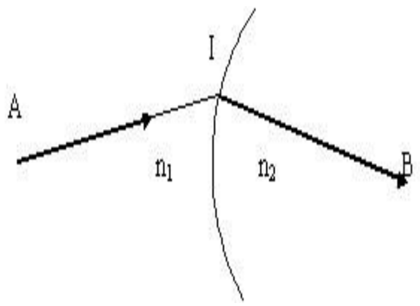
Dans le vide, le chemin optique se confond avec le chemin géométrique

$$(AB) = nAB = AB \ \ (n=1)$$

1. Cas de deux milieux homogènes :

Un dioptre est une surface qui sépare deux milieux d'indices différents, On applique la définition du chemin optique aux milieux (1) et (2) on a :

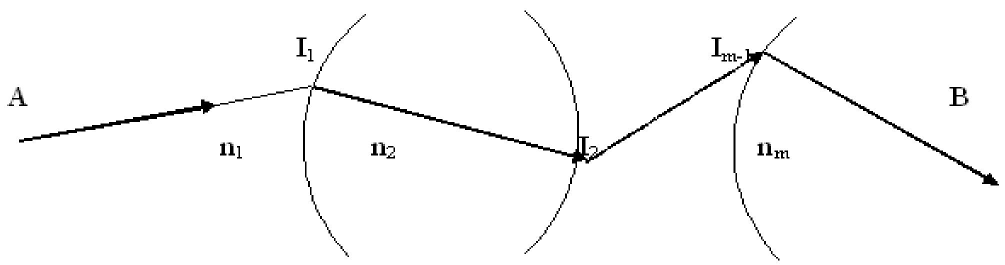
$$(AB) = (AI) + (IB) = n_1 AI + n_2 IB$$



2. Cas de plusieurs milieux homogènes:

Le chemin optique est donné par :

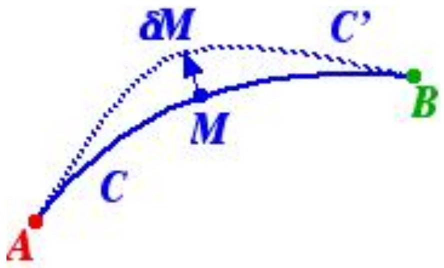
$$(AB) = n_1 \overline{AI_1} + n_2 \overline{I_1 I_2} + \ldots + n_m \overline{I_{m-1} B}$$



5. Principe de Fermat et ses conséquences

1. Enoncé du principe

Soient deux points A et B dans un milieu quelconque, le principe de Fermat s'énonce comme suit : le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller de A à B est celui pour lequel le chemin optique $(AB)=\int_{\Gamma} ndl$ est stationnaire.



Pour préciser la signification mathématique de cet énoncé, considérons une trajectoire obtenue en déformant Γ par un déplacement élémentaire $\delta\vec{M}$, en chaque point M de Γ, tel que : $\delta\vec{A}=\delta\vec{B}=\vec{0}$

L est stationnaire si la quantité élémentaire $\delta L = L' - L$ est infiniment petite par rapport à la valeur supérieur de $\delta\vec{M}$

Remarque :

a. Le chemin optique étant proportionnel au temps que mettrait la lumière pour suivre un trajet donné, le principe de Fermat exprime que la durée du trajet suivi par la lumière est stationnaire par rapport aux trajets infiniment voisins.

b. Dans milieu homogène (n=cte) et isotrope, l'intégrale $\int_{\Gamma} ndl$ ne peut être que minimale, ce qui implique la propagation rectiligne.

c. $(AB)=\int_A^B ndl = -\int_B^A ndl = \int_A^B n(-dl) = (BA)$

Notons $dl' = -dl$ l'élément curviligne orienté de B vers A, on voit que $(AB)=(BA)$,comme *(AB)* est stationnaire, *(BA)* l'est aussi.

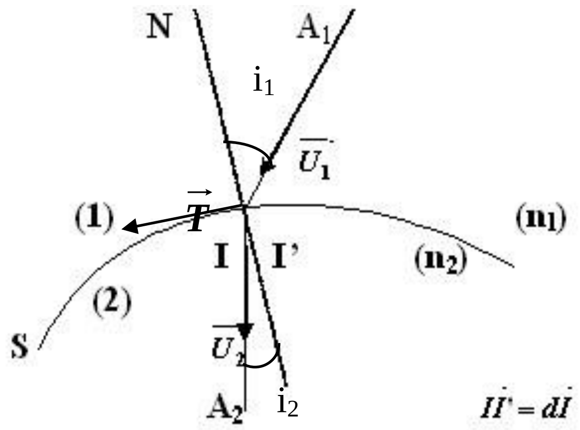
Le trajet suivi par la lumière ne dépend pas du sens du chemin parcouru, c'est le principe de retour inverse de la lumière.

2. Le principe de Fermat contient les lois Snell-Descartes

Les lois de la réflexion étaient connues des grecs, les lois de réfraction furent découvertes par Ibn Haytem, puis retrouvées par Snell, puis Descartes, elles permettent de déterminer le rayon réfracté lorsque la lumière traverse un dioptre (Lois de réfraction) ou le rayon réfléchi sur un miroir (Lois de réflexion)

1. Lois de réfraction

Soient deux points A_1 et A_2 situés dans deux milieux (1) et (2) transparents, homogènes, séparés par une surface S, le trajets $A_1I\ A_2$ suivi par la lumière comporte deux portions rectilignes A_1I dans le milieu (1) et $I\ A_2$ dans le milieu (2)



Calculons le chemin optique ($A_1I\ A_2$) :

$$L = (A_1IA_2) = n_1\vec{U}_1.\overrightarrow{A_1I} - n_2\vec{U}_2.\overrightarrow{A_2I}$$

Imaginons un trajet infiniment voisin de L en déplaçant $\boldsymbol{I}$ de $\overrightarrow{dI}$ dans le surface S, $\overrightarrow{dI}$ sera dans le plan tangent à S en I, Calculons le nouveau chemin optique :

$$L + dl = n_1(\vec{U}_1 + d\vec{U}_1)(\overrightarrow{A_1I} + d\vec{I}) - n_2(\vec{U}_2 + d\vec{U}_2)(\overrightarrow{A_2I} + d\vec{I})$$

Soit

$$dl = (n_1\vec{U}_1 - n_2\vec{U}_2)d\vec{I} + n_1 d\vec{U}_1\overrightarrow{A_1I} - n_2 d\vec{U}_2\overrightarrow{A_2I} + \varepsilon$$

où ε est infiniment petit du second ordre.

Or $\vec{U}_{i_{(i=1,2)}}$ est un vecteur de module constant (unitaire), donc $\vec{U}_i \perp d\vec{U}_i$, donc $d\vec{U}_i\overrightarrow{A_iI} = 0$

dL devient

$$dL \approx (n_1\vec{U}_1 - n_2\vec{U}_2)d\vec{I}$$

Si $A_1I\ A_2$ est un rayon lumineux, (principe de Fermat) , L est extremum par rapport à tout trajet infiniment voisin de L. Donc dL=0 quelque soit $\overrightarrow{\mathbf{dI}}$.

$n_1\vec{U}_1 - n_2\vec{U}_2$ est donc un vecteur normal à l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{dI}}$, c'est-à-dire orthogonale au plan tangent à S en I et orienté dans le sens de propagation de la lumière. Il existe un scalaire α tel que:

$$n_1\vec{U}_1 - n_2\vec{U}_2 = \alpha\vec{N}$$

Les vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}2$ et $\vec{N}$ qui sont liés par une relation linéaire, sont dans un même plan

a. Première lois de la réfraction

Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale en I à S appartiennent au même plan appelé : plan d'incidence

b. Deuxième lois de la réfraction

Multiplions scalairement par $\vec{T}$ les deux membres de l'égalité précédente, on trouve:

$$n_1\vec{U}_1\vec{T} - n_2\vec{U}_2\vec{T} = 0 \quad (\vec{N} \text{ et } \vec{T} \text{ étant orthogonaux})$$

On pose $i_1 = (\vec{N}, \vec{U}_1)$ (angle d'incidence) et $i_2 = (\vec{N}, \vec{U}_2)$ (angle de réfraction), l'égalité précédente s'écrit alors :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

2. Lois de réflexion

La surface S (dioptre) est remplacée par un miroir, Le rayon réfracté IA_2 est remplacé par le rayon réfléchi se propageant dans le milieu (1). L'égalité précédente devient :

$$n_1(\vec{U}_1 - \vec{U}_2) = \alpha \vec{N}$$

a. Première lois de la réflexion

Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence

b. Deuxième lois de la réflexion

Multiplions scalairement par $\vec{T}$ les deux membres de l'égalité précédente :

$$\vec{U}_1.\vec{T} - \vec{U}_2.\vec{T} = 0$$

Donc $\sin(i_1) = \sin(i_2)$ c'est-à-dire $i_1 = i_2$

Si on compte les angles algébriquement à partir de la normale, ils sont de signes opposés :

$$i_1 = -i_2$$

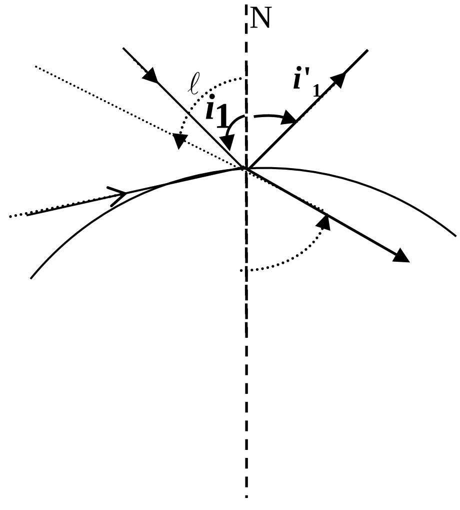
Remarques :

- $i_1 = -i_2$ donc $n_1 \sin i_1 = (-n_2)\sin i_2$ relation de la même forme que pour la réfraction. De ce point de vue, la réflexion peut être considérée comme un cas particulier de la réfraction dans lequel le deuxième milieu aurait un indice opposé à celui du premier milieu
- A tout rayon incident en un point du dioptre S peut correspondre un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

Le rayon réfléchi existe toujours, sauf dans un cas particulier, dont l'étude est du domaine de l'optique ondulatoire (Angle de Brewster)

Lorsque $n_2 > n_1$, (le second milieu est plus réfringent que le premier), on peut toujours trouver i_2 tel que $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1 < 1$, le rayon réfracté existe toujours.

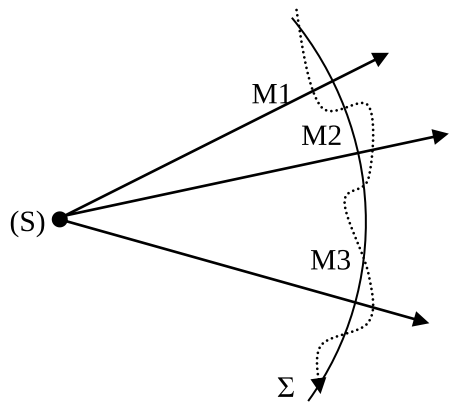
Lorsque $n_2 < n_1$, i_2 ne peut pas être calculé si $\frac{n_1}{n_2}\sin i_1 > 1$. Il existe une valeur limite supérieure ℓ de l'angle d'incidence i_1 telle que $\sin \ell = \frac{n_2}{n_1}$, pour les incidences $i_1 \le \ell$ il existe un rayon réfracté. Pour les incidences $i_1 > \ell$, il n' y a pas de rayon refracté : on dit qu'il y a réflexion totale, ℓ est appelé angle de réfraction limite



3. Théorème de Malus

1. Surface d'onde en optique géométrique

Soit une source ponctuelle (S), on appelle surface d'onde (Σ) l'ensemble des points M tels que le chemin optique soit constant, ce chemin optique étant compté le long d'un rayon lumineux



2. Exemple

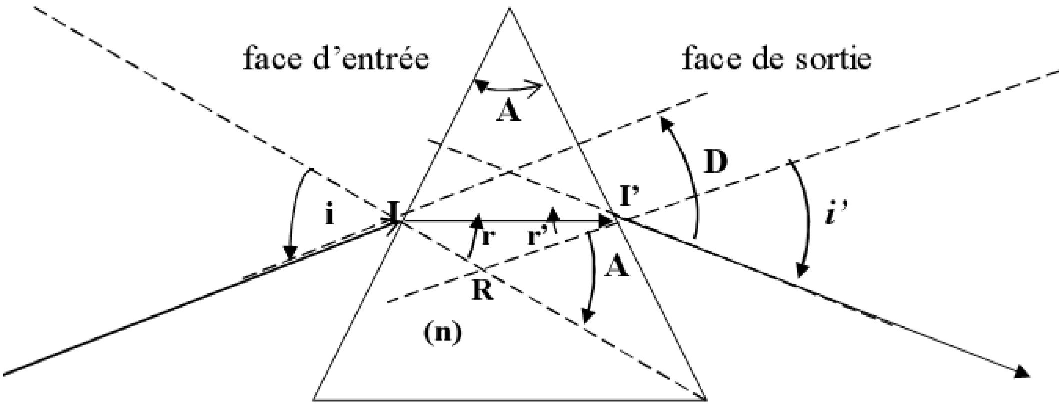
Une source ponctuelle (S) est placée dans un milieu transparent, homogène et isotrope, les rayons lumineux sont alors rectilignes. Porter un chemin optique constant à partir de (S) revient à prendre sur chaque rayon une longueur constante ; les surfaces d'onde (Σ) sont donc des sphères de centre (S).

Si on se place à des distances très éloignées de la source, les surfaces d'ondes deviennent des surfaces planes qu'on appelle des plans d'ondes.

<u>Enoncé du Théorème de Malus</u>

Les rayons lumineux provenant d'une source de lumière sont normaux aux surfaces d'ondes après un nombre quelconque de réflexion et de réfraction.

4. indice de réfraction du prisme



Le triangle I I'R montre que $A = r + r'$ et $D = i + i' - (r + r')$ donc

$$\boxed{D = i + i' - A}$$

Les lois de réfraction :

$\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$

N.B : l'indice de réfraction de la face d'entrée et celle de sortie est égale est celle de l'air (n=1)

Nous allons montrer que lorsque i varie, D passe par une valeur minimale D_m pour une radiation monochromatique (Minimum de déviation).

Détermination de minimum de Déviation

On a $A = r + r' \Longrightarrow dA = dr + dr'$, ainsi $dr = -dr'$

$$D = i + i' - A \Longrightarrow dD = di + di' \Longrightarrow \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

$\sin i' = n \sin r'$ $\Longrightarrow$ $d(\sin i') = n d(\sin r')$ $\Longrightarrow$ on en déduit : $di' = -\frac{n \cos r'}{\cos i'} dr$

$\sin i = n \sin r$ $\Longrightarrow$ $\cos i di = n \cos r dr$ et $n = \frac{\cos i di}{\cos r dr}$ $\Longrightarrow$ $di' = -\frac{\cos i}{\cos r} \cdot \frac{\cos r'}{\cos i'} di$ $\Longrightarrow$ $\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \cdot \frac{\cos r'}{\cos r}$

Le minimum de déviation est atteint lorsque $\frac{dD}{di} = 0 \Longrightarrow \frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \cdot \frac{\cos r'}{\cos r} = 0$

$\cos i \cos r' = \cos i' \cos r \longrightarrow \cos^2 i \ \cos^2 r' = \cos^2 i' \ \cos^2 r$

$(1 - n^2 \sin^2 r)(1 - \sin^2 r') = (1 - n^2 \sin^2 r')(1 - \sin^2 r) \longrightarrow (1 - n^2)(\sin^2 r - \sin^2 r')$,

ceci est vrai si $\sin^2 r = \sin^2 r'$, ce qui admet la seule solution $r = r'$

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 i \ \cos^2 r' = \cos^2 i' \ \cos^2 r \\ r = r' \end{array}\right\} \longrightarrow \quad i = i'$$

$$r = r' \Longrightarrow \frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i}{\cos i'} \cdot \frac{\cos r'}{\cos r} = 0 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{dD}{di} = 0 \\ r = r' \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin i = n \sin r \\ D_m = 2i - A \end{array} \longrightarrow \quad i = \frac{D_m + A}{2}\right\} \Longrightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

Chapitre 2

I. Stigmatisme – Aplanétisme

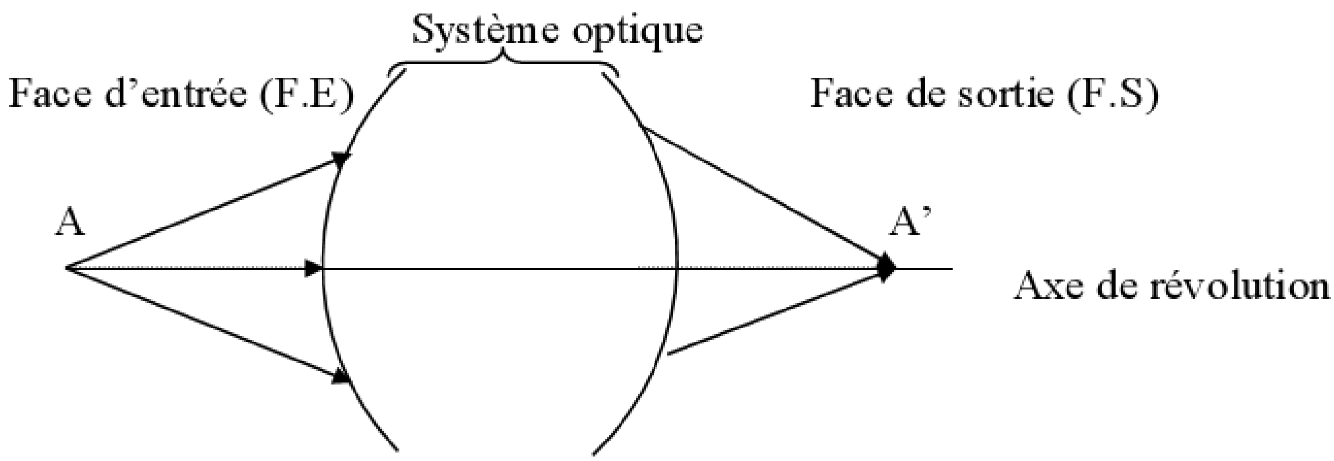
1. Système optique : un système optique est une suite de milieux transparents en général homogènes et isotropes limités par des dioptres et des miroirs. Si ces surfaces ont un axe de révolution on dit qu'on a un *système optique centré (plan, sphère)*.

On distingue trois catégories de systèmes :

Les systèmes **dioptriques** : comportant seulement des dioptres

Les systèmes **catoptriques** : comportant que des miroirs

Les systèmes **catadioptriques** : comportant des dioptres et des miroirs



3. condition de Gauss

un système est utilisé dans les conditions de Gauss lorsque les rayons lumineux qui le traverse sont paraxiaux c'est- a- dire peu inclinés par rapport à l'axe optique du système

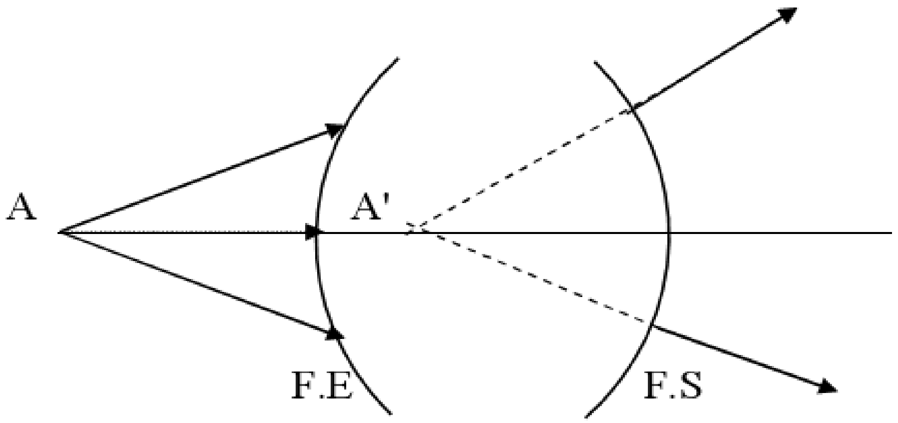
4. Image d'un point

Soit A, une source ponctuelle objet envoyant sur la face d'entrée de S des rayons lumineux dits : ***rayons incident***. Si après avoir traversé le système (s) les rayons correspondant dits rayons émergents passe tous par le même point A' ce point est *dit Image de A*, deux cas sont distingués

- ou bien les rayons émergents passent réellement par A' et dans ce cas on dit que A' est une ***image réelle.***

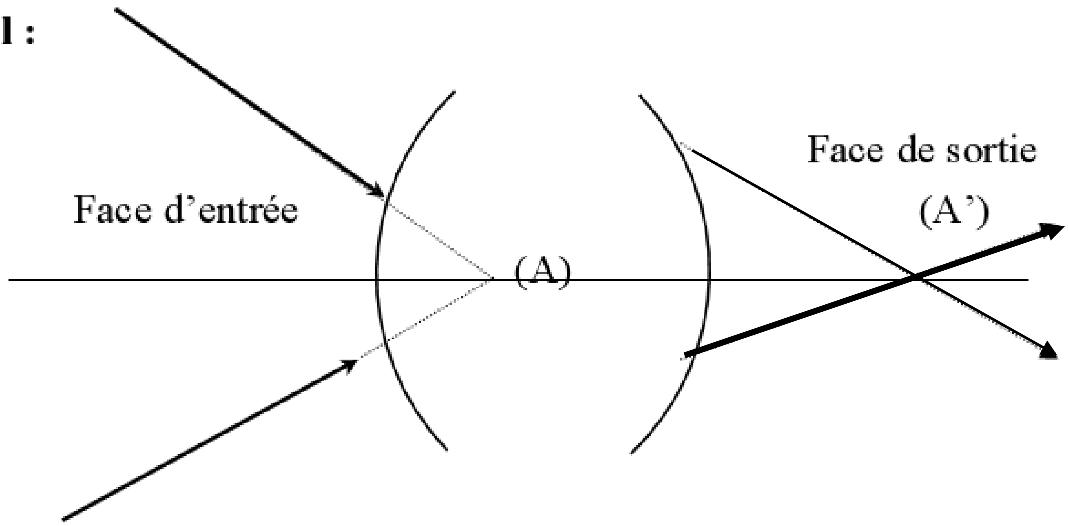
- ou bien ce ne sont que les prolongements de ces rayons qui passent par A', alors on dit que A' est une ***image virtuelle***.

(l'image A' de A ne peut pas être matérialisée sur un écran)

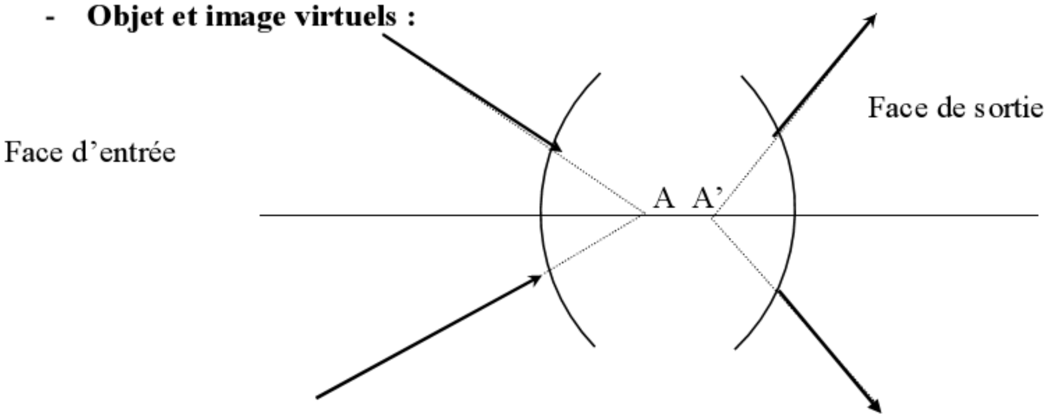


Remarque : si A’ est l’image de A, si nous plaçons en A’ une source ponctuelle, d’après le principe de retour inverse de la lumière, tous les rayons émis de A’ passent par A. A est donc l’image de A’. Pour tenir compte de cette symétrie on dit que le système optique est stigmatique pour le couple (A, A’).

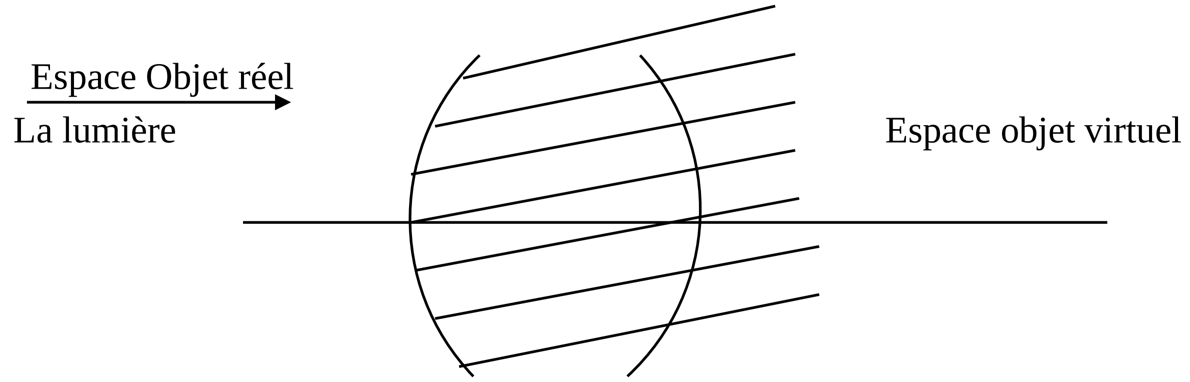
- **Objet virtuel :**



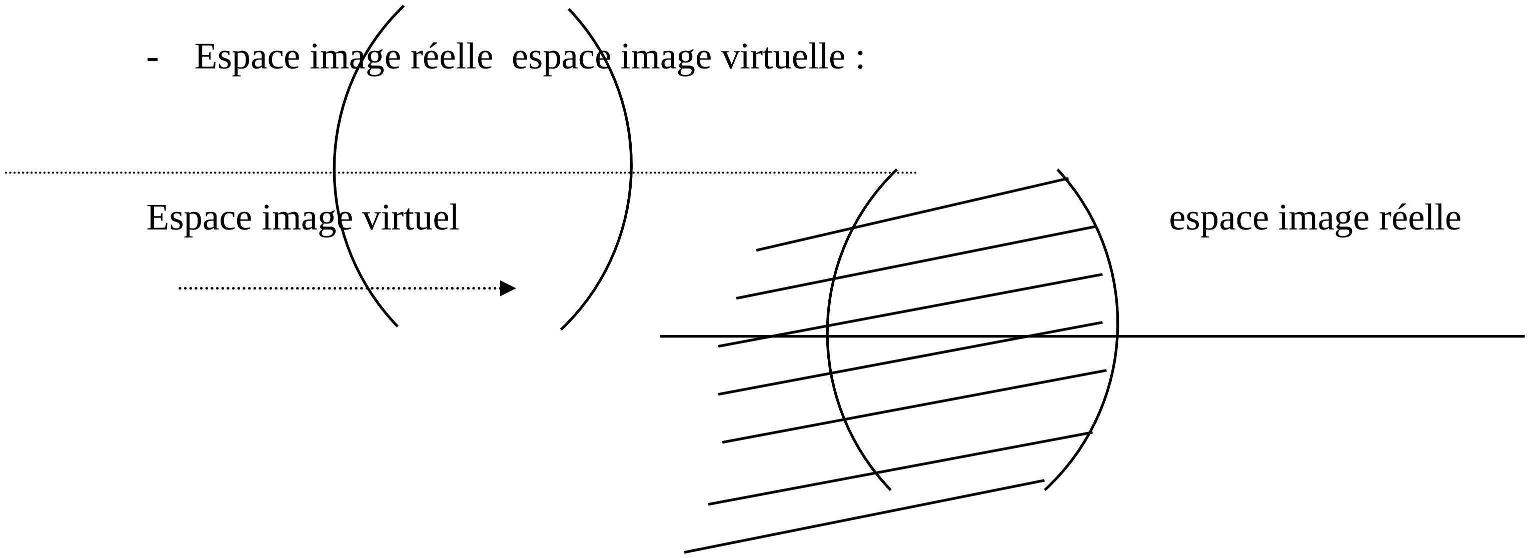
- **Objet et image virtuels :**



- Espace objet réel - espace image virtuel :



- Espace image réelle espace image virtuelle :

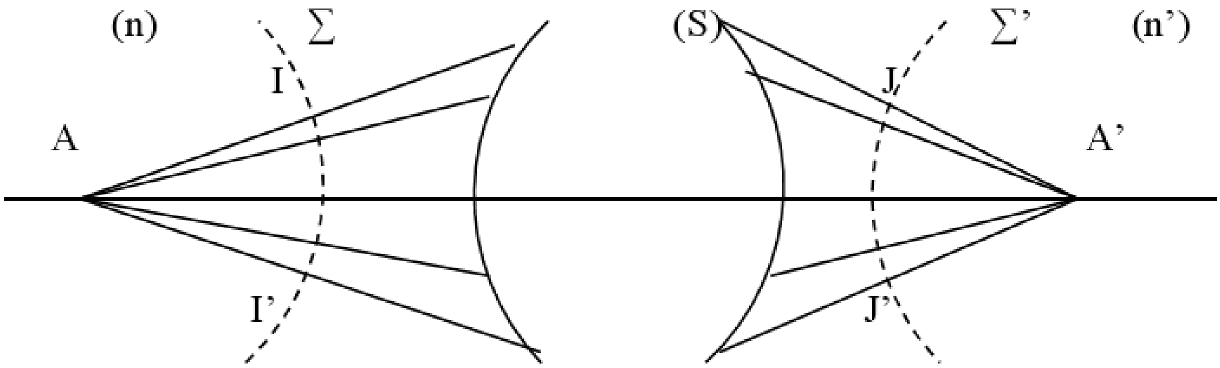


5. Stigmatisme rigoureux

1. Définition

Un système optique S est dit rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A,A’) si tout rayon passant par un point fixe A émerge de l’instrument en donnant naissance à un rayon passant par un point A’ fixe de l’axe optique. On dit encore que A et A’ sont conjugués par rapport à S

2. Conditions de stigmatisme rigoureux



I et J désignent les intersection des rayons incidents et émergents avec les surfaces d’ondes ∑ et ∑’, calculons le chemin optique (AA’)

$$(AA') = nAI + (IJ) + n'JA' \text{ pour tout I et J}$$

$$(AA') = nR + (IJ) + n'R'$$

R et R' désignent les rayons de courbure de $\sum$ et $\sum$'.

Quelque soit le rayon incident, le chemin optique (IJ) garde une valeur constante (chemin optique compris entre deux surfaces d'ondes). La structure de (AA') est indépendante du rayon choisi.

$$(AA') = Cte$$

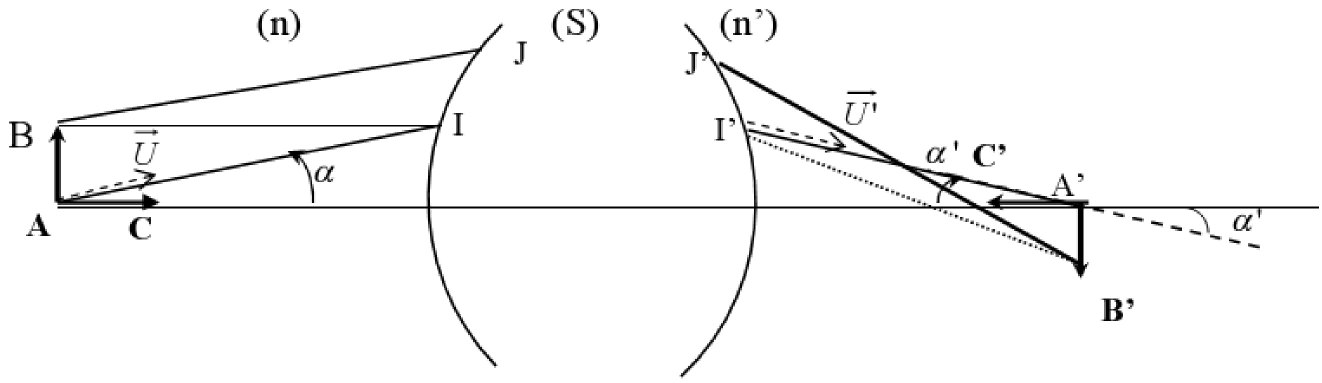
3. Stigmatisme approché

Sauf dans quelques très particuliers, le stigmatisme rigoureux n'est pas réalisable. En général, on se contente en pratique d'un stigmatisme approché.

Un système optique sera considéré comme stigmatique si les rayons issus d'un point A passe à la sortie du système, suffisamment près de A' pour que l'écart n'apparaisse pas au récepteur. La distance tolérée dépend entre autres, des qualités de ce récepteur. A' peut être considéré comme l'image ' approximative 'de A. L'image d'un point est une petite tache.

4. Aplanétisme

En général, le but d'un instrument d'optique ne se limite pas à obtenir une image ponctuelle d'un objet ponctuel ; il s'agit d'obtenir une image étendue d'un objet étendu.



Limitons-nous tout d'abord au cas assez fréquent où le but à atteindre est d'obtenir à l'aide d'un système centré une image plane d'un objet plan perpendiculaire à l'axe optique.

1. Définition

On dit qu'un système est aplanétisme pour le couple des points A et A' situés sur l'axe optique lorsqu'il est non seulement stigmatique pour les points A et A', mais aussi pour tout couple des points B et B' au voisinage de l'axe.

2. Conditions d'aplanétisme : relation d'Abbé

Il y a stigmatisme pour (A, A') et (B, B'), donc

$$\left.\begin{array}{l}(AA') = \text{Cte} = C_1 \\ \\ (BB') = \text{Cte} = C_2\end{array}\right\} \text{Pour tout } \alpha$$

Calculons la différence des chemins optiques $(BB') - (AA') = C_1 - C_2 = C_3$ pour tout α

$$(AA') = n\overline{AI} + (II') + n'\overline{I'A'}$$

$$(BB') = n\overline{BJ} + (JJ') + n'\overline{J'A'}$$

Mais d'après les conditions de gauss, on a aussi $(BB') = (AA') + dL$

En admettant aussi le stigmatisme approché, tout rayon issu du point objet B parvient au point B', en particulier le rayon issu de B et incident sur le dioptre en I, émergent en I' et arrivant en B'. Dans ce cas, le chemin optique (BB') s'écrit :

$$(BB') = n\overline{BI} + (II') + n'\overline{I'B'}$$

Et donc pour la différence du chemin $dL = (BB') - (AA')$

$$dL = n\overline{BI} + (II') + n'\overline{I'B'} - n\overline{AI} - (II') - n'\overline{I'A'}$$

$$= n(\overline{BI} - \overline{AI}) + n'(\overline{I'B'} - \overline{I'A'})$$

On a la relation vectorielle $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$, et en projetant sur l'axe optique en tenant compte des conditions de Gauss (petits angles) :

$$\overline{BI} - \overrightarrow{AI} = \overline{AB}\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \overline{AB}\sin(\alpha)$$

De même en abaissant la perpendiculaire à la droite (I'B') du point A', on obtient

$$\overline{I'B'} - \overline{I'A'} = \overline{A'B'}\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha') = \overline{A'B'}\sin(\alpha')$$

Finalement, on obtient pour la différence du chemin optique

$$dL = n\overline{AB}\sin(\alpha) - n'\overline{A'B'}\sin(\alpha')$$

Pour tout point B du plan objet, le point B' sera dans le même plan d'image si cette différence de chemin optique est constante, on écrit donc :

$$dL = constante$$

Cette constante peut donc être calculée en un point particulier, par exemple pour $\alpha = \alpha' = 0$ il vient alors :

$$dL = n\overline{AB}\sin(\alpha) - n'\overline{A'B'}\sin(\alpha') = 0$$

Finalement, la condition d'aplanétisme (condition des sinus **d'Abbe**) se traduit par la relation

$$n\overline{AB}\sin(\alpha) = n'\overline{A'B'}\sin(\alpha')$$

Condition découverte par le physicien Abbe

Remarque : si l'angle d'ouverture du faisceau lumineux incident est faible, c'est à dire si le système travaille dans les conditions de Gauss $\sin(\alpha) = \alpha$ on a

$$n\overline{AB}\alpha = n'\overline{A'B'}\alpha$$ **Relation de Lagrange Helmholtz**

a. **Grandissement linéaire**

On appelle grandissement linéaire le rapport algébrique de la taille de l'image sur la taille de l'objet

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

On l'appelle aussi le **grandissement transversal**

b. Grandissement angulaire

On appelle grandissement angulaire le rapport algébrique de l'angle du rayon émergent sur l'angle du rayon incident

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

On appelle aussi G le rapport de convergence

3. Condition d'Herschel

L'instrument est stigmatisme pour le couple de points A et A', Le point objet C se déplace sur l'axe optique au voisinage de A ; son image C'est aussi voisin de A'

La condition nécessaire pour que le couple de point C et C' soit stigmatisme est que le chemin optique (CC') soit constant pour tout rayon issu de C.

$$(CC') - (AA') = cte \text{ Pour tout } \alpha$$

Un calcul analogue au précédent nous donne :

$$n\overline{AC}\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = n'\overline{A'C'}\sin^2(\frac{\alpha'}{2}) \text{ Relation d'Herschel}$$

4. Image d'un élément de volume

On peut demander si les conditions d'Abbe et d'Herschel peuvent être compatibles, autrement dit si l'on peut avec certains systèmes optiques obtenir l'image d'un petit volume.

Pour n, n', $\overline{AB}, \overline{A'B'}, \overline{AC}, \overline{A'C'}$ donnés, la condition d'Abbé impose au rapport $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha')} = \frac{n}{n'}.\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ de rester constant lorsque α varie, et la condition d'Herschel impose au rapport : $\frac{\sin^2(\frac{\alpha'}{2})}{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = \frac{n}{n'}\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ de rester constant lorsque α varie.

Il faut donc que $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ et $\frac{\sin^2(\frac{\alpha'}{2})}{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}$ restent simultanément constant lorsque α varie, c'est à dire, il faut que $\frac{\sin\ (\frac{\alpha'}{2})}{\sin\ (\frac{\alpha}{2})}$ et $\frac{\cos\ (\frac{\alpha'}{2})}{\cos\ (\frac{\alpha}{2})}$ restent simultanément constant lorsque α varie.

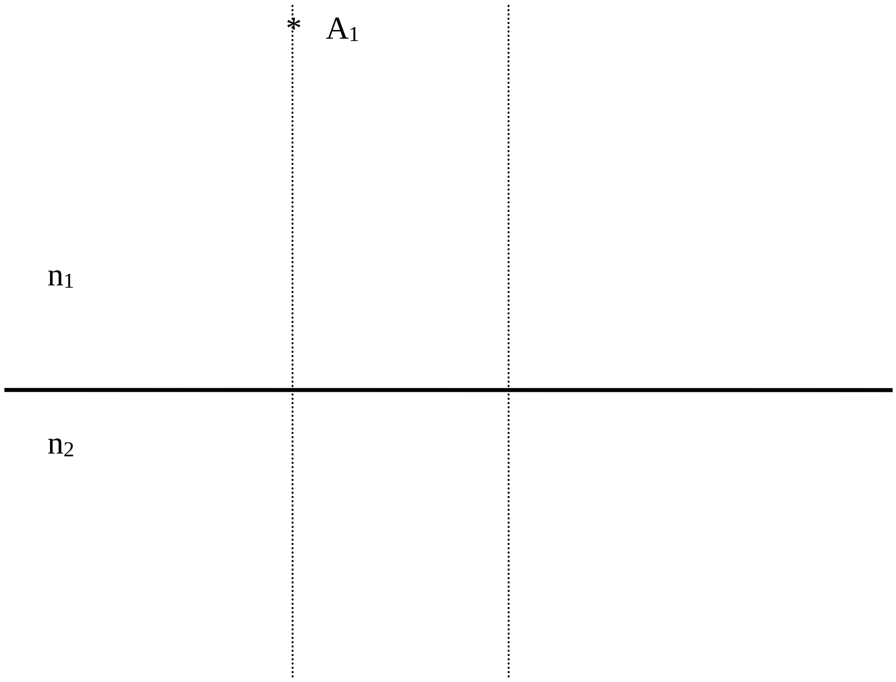
Les deux conditions sont en général incompatibles (le cas du miroir plan $|\alpha| = |\alpha'|$ est particulier.

Chapitre 3
DIOPTRE PLAN ET LAMES A FACE PARALLELES

I. Dioptre Plan

Le dioptre plan est constitué de deux milieux transparents d'indices différents n_1 et n_2 (inégalement réfringents) séparés par une surface plane.

Exemple : l'aire et l'eau calme d'une piscine



Les indices n_1 et n_2 sont différents

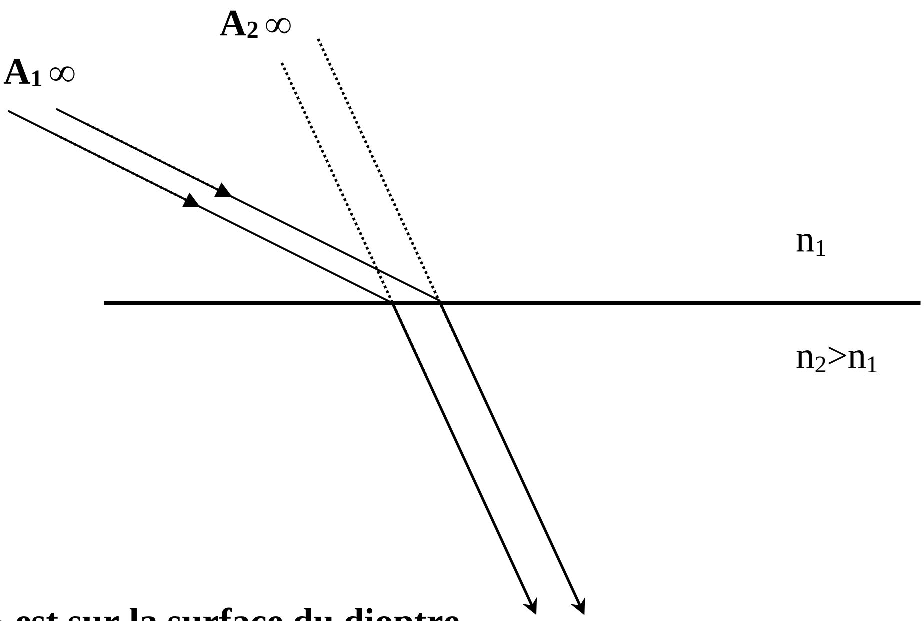
Les rayons lumineux issus d'un point objet A_1 situé dans le milieu d'indice n_1 se réfractent en traversant le dioptre plan.

Les rayons issus du point objet A_1 situé dans le milieu (1) d'indice n_1 se réfractent en passant dans le milieu (2) d'indice n_2. On cherche, en effectuant un raisonnement purement géométrique, s'il existe des points particuliers qui réalisent le stigmatisme rigoureux : c'est-à-dire pour lesquels tous les rayons issus du point objet passent par un même point après réfraction.

1. l'objet A_1 se trouve à l'infini.

Tous les rayons incidents sont parallèles entre eux et forment un faisceau cylindrique.

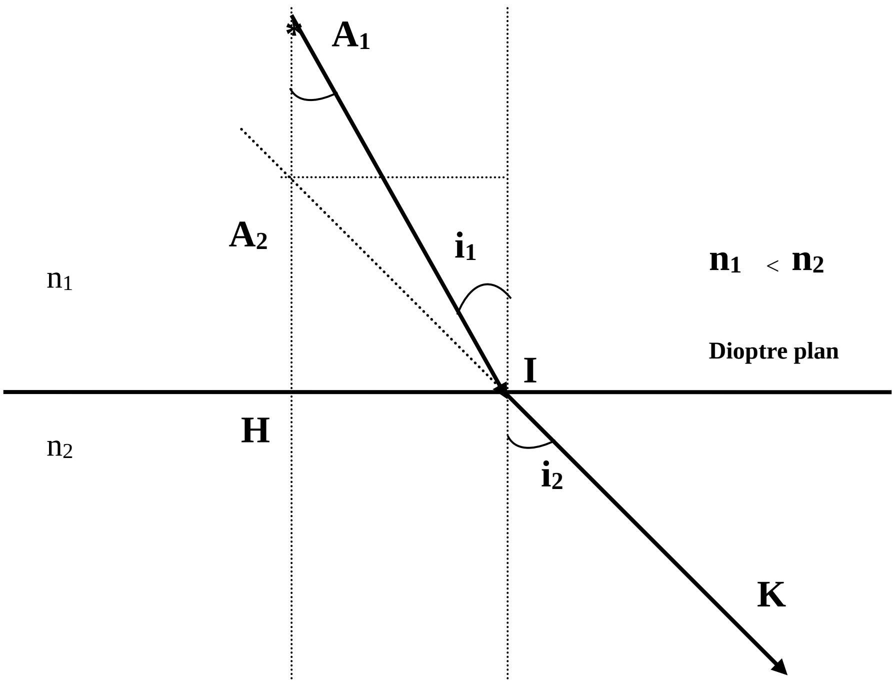
D'après la 3ème loi de DESCARTES : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ tous les rayons émergents sont eux aussi parallèles et donc, pour un observateur, ils paraissent provenir d'un point A_2 unique qui est également à l'infini.



3. A₁ est sur la surface du dioptre.

Dans ce cas le stigmatisme rigoureux est évident. Mais ceci ne présente aucun intérêt pratique.

4. l'objet A₁ se trouve à une distance finie du dioptre plan



Le système est de révolution autour de la normale A_1H. Le rayon A_1H traverse la surface sans déviation. Si une image de A_1 existe, elle est donc nécessairement sur A_1 H ; Le rayon A_1I donne lieu à un rayon réfracté IK qui coupe A_1H au point A_2, nous obtenons les relations suivantes

$$tgi_1 = \frac{HI}{HA_1} \Longrightarrow HI = HA_1 tg._1$$

$$tgi_2 = \frac{HI}{HA_2} \Longrightarrow HI = HA_2 tgi_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{HA_2 = HA_1 \frac{tgi_1}{tgi_2}}$$

Pour les différents rayons issus de A_1, i_1 varie et

$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = cst$, mais $\frac{tgi_1}{tgi_2}$ n'est pas constant $\Longrightarrow$ au point objet A_1 correspondent plusieurs images A_2. Il n' y a donc pas de stigmatisme pour les points à distance finie. (Les *rayons réfractés ne se rencontrent donc pas tous en un même point*)

1. *Etude des images dans le cas du stigmatisme approché.*

Si l'angle i_1 est faible il en est de même pour l'angle i_2 et on peut écrire : $tgi_1 \approx \sin i_1$ et $tgi_2 \approx \sin i_2$

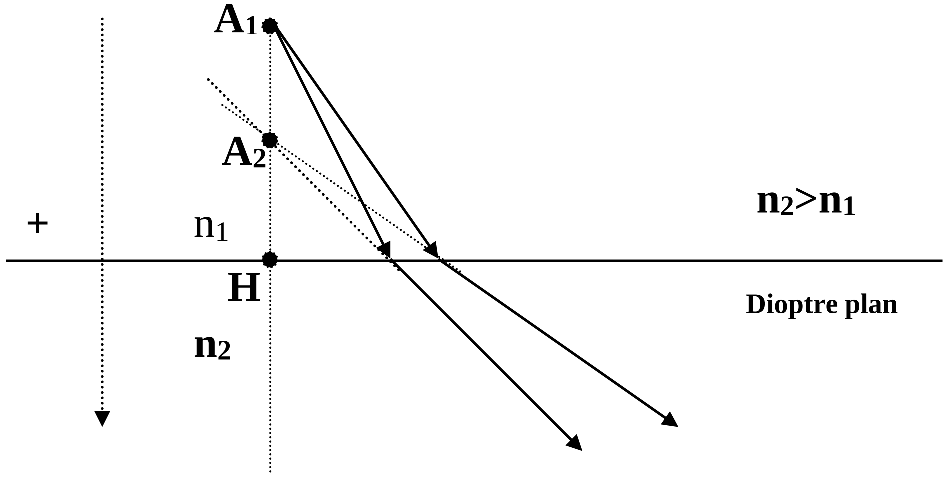
On obtient alors avec une bonne approximation :

$$HA_2 = HA_1 \frac{tgi_1}{tgi_2} \approx HA_1 \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \approx HA_1 \frac{n_2}{n_1}$$

Cette relation implique qu'à l'objet A_1 correspond une seule image A_2 D'où la formule du dioptre plan

D'ou la formule du dioptre plan $\frac{\overline{HA_1}}{n_1} = \frac{\overline{HA_2}}{n_2}$

En conclusion, il y a stigmatisme approché seulement pour les rayons lumineux peu inclinés par rapport à la normale au dioptre.



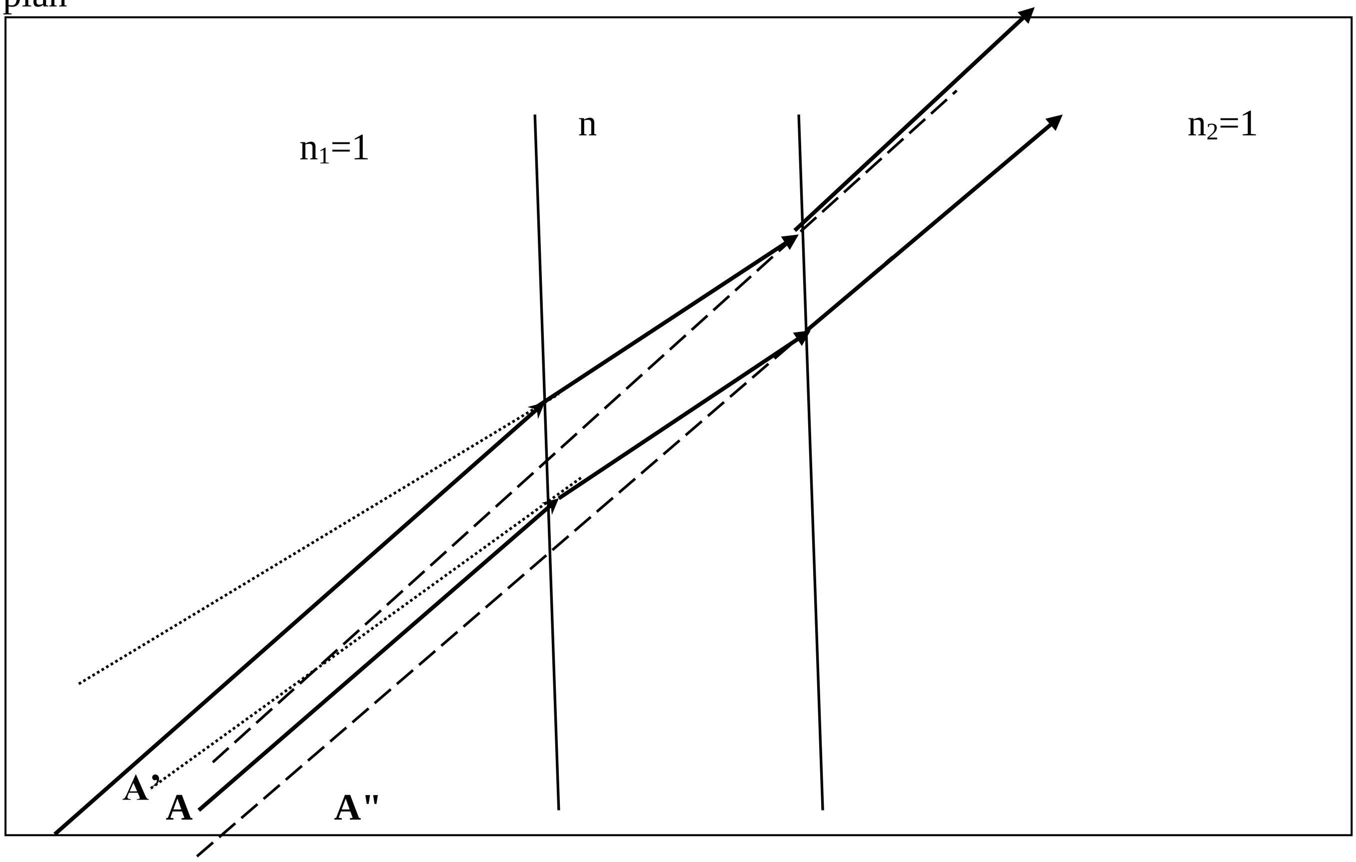
$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1H} - \overline{A_2H} = \overline{A_1H}(1 - \frac{n_2}{n_1})$$

Cette relation implique un rapprochement apparent de A_1 vers la surface (dans le cas où A_2 joue le rôle d'objet) c'est l'inverse qui se produit si l'objet et l'image sont permutés. Les relations établies montrent que HA_1 et HA_2 sont de même signe et donc A_1 et A_2 sont dans le même milieu et, par conséquent, de natures opposées.

II. Lames à faces parallèles

1. L'objet se trouve à l'infini

On réalise la figure suivante en appliquant les résultats établis pour le dioptre plan



On remarque qu'après la traversée de la lame, deux rayons lumineux parallèles en sortent parallèles, donc l'image A" d'un objet A situé à l'infini est rejetée à l'infini : il y a stigmatisme pour ce couple de points.

2. L'objet se trouve à une distance finie de la lame

Nous reprenons le même travail qui a été fait dans le cas du dioptre plan

<u>Le premier dioptre nous donne :</u>

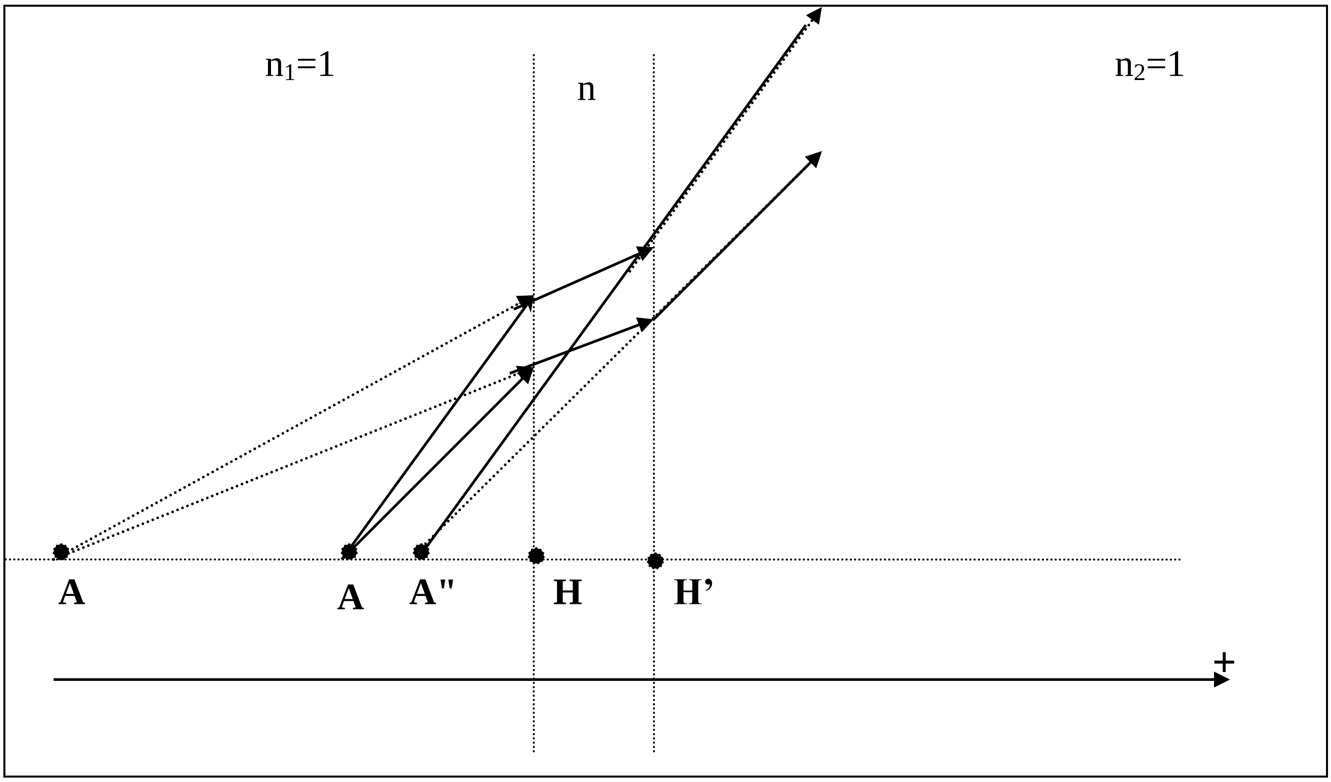
C'est A qui joue le rôle de l'objet.

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA'}}{n}, \; n_1 = 1 \Longrightarrow \overline{HA} = \frac{\overline{HA'}}{n} \text{ ou } \overline{AH} = \frac{\overline{A'H}}{n}$$

<u>Le deuxième dioptre plan nous donne :</u>

Dans ce cas A' joue le rôle de l'objet pour le deuxième dioptre plan

$$\frac{\overline{H'A'}}{n} = \frac{\overline{H'A''}}{n_2}, \; n_2 = 1 \Longrightarrow \overline{H'A''} = \frac{\overline{H'A'}}{n} \text{ ou } \overline{A''H''} = \frac{\overline{A'H'}}{n}$$



En ajoutant l'action des deux dioptres on a :

$$\overline{AA''} = AH + \overline{HH'} + \overline{H'A''} = \frac{\overline{A'H}}{n} + \overline{HH'} + \frac{\overline{H'A'}}{n} \Longrightarrow \quad \overline{AA''} = \frac{\overline{H'A'} + \overline{A'H'}}{n} + \overline{HH'}$$

$\overline{AA''} = \frac{\overline{H'H}}{n} + \overline{HH'}$, on pose $\overline{HH'} = e$, alors on a :

$$\overline{AA''} = e(1 - \frac{1}{n})$$

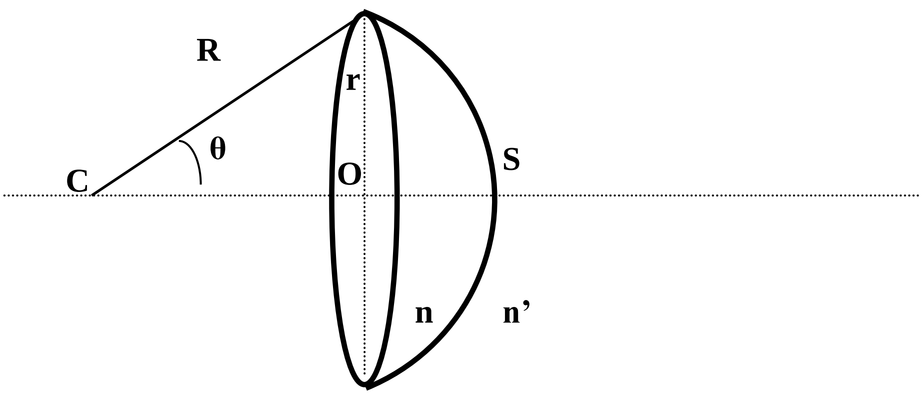
En conclusion, la position de l'image se déduit de celle de l'objet par une translation aux faces de la lame, d'amplitude constant, indépendante de la position de l'objet, l'indice est supérieur à 1 donc le déplacement apparent de l'image a lieu dans le sens de celui de l' objet :

Si l'objet est plan et parallèle aux faces de la lame et s'il n'envoie que des rayons sous faible incidence, l'image A"B" de l'objet AB lui est parallèle et de nature opposée.

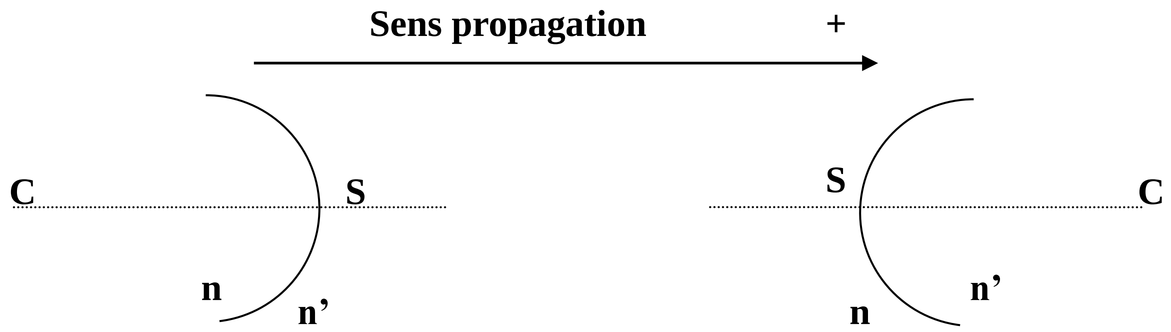
Chapitre 4
DIOPTRE SPHERIQUE

I. Définition

On appelle dioptre sphérique l'ensemble de deux milieux réfringents transparents séparés par une surface sphérique qui, dans le cas général, est une calotte sphérique de centre O.

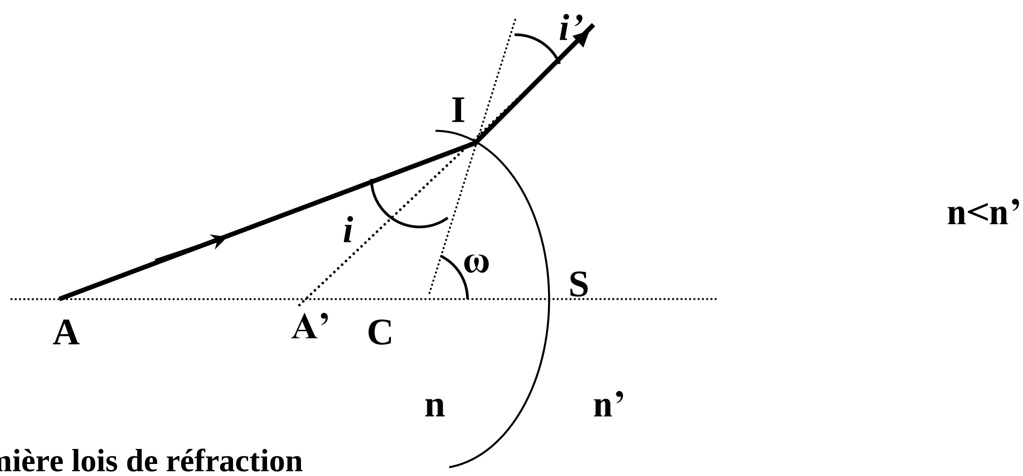


Le centre C de la sphère est le centre du dioptre, La droite CO est l'axe principal du dioptre sphérique. Il rencontre la calotte sphérique en S qui est le sommet du dioptre.
Le rayon du cercle de base est le rayon d'ouverture θ sous lequel on voit le rayon ***r*** est le demi angle d'ouverture
Le dioptre est concave si le sens de propagation de la lumière est celui du vecteur reliant le centre du dioptre au sommet du dioptre (sens de la lumière suit $\overrightarrow{CS}$). Il est convexe dans le cas inverse.



II. Image d'un point lumineux sur l'axe du dioptre

a. Invariant fondamental



Première lois de réfraction

Le rayon incident AI, le rayon réfracté IA', la normal CI appartiennent au plan d'incidence pris comme plan de figure.
Entre les éléments des triangles CIA et CIA', on a les relations suivantes :

$$\frac{\overline{CA}}{\sin(i)} = \frac{\overline{IA}}{\sin(\pi - w)} = \frac{\overline{IA}}{\sin(w)} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{CA'}}{\sin(i')} = \frac{\overline{IA'}}{\sin(w)} \quad \text{donc}$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\sin(i')}{\sin(i)} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$$

Et en tenant compte de $n\sin(i) = n'\sin(i')$, nous aurons :

$$\boxed{n\frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n'\frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}}$$

La quantité $n\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}}$ qui se conserve à la traversée du dioptre sphérique est un ***invariant fondamental.***

III. Recherche du stigmatisme rigoureux

A' image de A, donc $CA' = cst$ si $\overline{CA} = cst$ d'où

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \text{cte} \qquad \text{pour tout I}$$

A' sera une image rigoureusement stigmatique de A si la quantité $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}$ reste constante lorsqu'on passe d'un rayon lumineux à un autre, c'est à dire lorsque le point I se déplace sur le dioptre. Le lieu de I est une sphère qui divise harmoniquement le segment AA'.

- **Cas particuliers**

1. L'objet est placé sur le dioptre

Dans ce cas $\overline{IA} = 0$, d'après l'invariant fondamental, $\overline{IA'} = 0$ c'est à dire A et A' sont confondus, le stigmatisme rigoureux est réalisé pour tous les points de la surface du dioptre (aucun intérêt pratique) .

2. L'objet est placé au centre du dioptre

$A \equiv C$ Donc $\overline{CA} = 0$ et $\overline{CA'} = 0$ c'est à dire $A \equiv A' \equiv C$, $\forall I$ sur le dioptre.
Ce cas pouvait se prévoir directement, les rayons issus du centre traversent le dioptre sans déviation.

3. A et A' conjugués harmoniquement par rapport au dioptre

Les point A et A' doivent satisfaire la relation $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ =cst $\forall I$

En plaçant successivement le point I en S et S', et en tenant compte des ***sens des segments***

On a $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{S'A'}}{\overline{S'A}} = \frac{\overline{SA'} - \overline{S'A'}}{\overline{SA} + \overline{S'A}} = \frac{\overline{SS'}}{\overline{SC} + \overline{CA} + \overline{S'C} + \overline{CA}}$

$$\frac{\overline{SS'}}{\overline{SC} + \overline{CA} + \overline{S'C} + \overline{CA}} = \frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \quad \text{soit} \quad \frac{\overline{SS'}}{2\overline{CA}} = \frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$\text{d'où } \boxed{\overline{CA'} = -\frac{n}{n'}\overline{CS}}$$

De même $\frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{S'A'}}{\overline{S'A}} = \frac{\overline{SA'} + \overline{S'A'}}{\overline{SA} - \overline{S'A}} = \frac{\overline{SC} + \overline{CA'} + \overline{S'C} + \overline{CA'}}{\overline{SS'}}$ soit $\frac{2\overline{CA'}}{\overline{SS'}} = \frac{n'}{n}\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

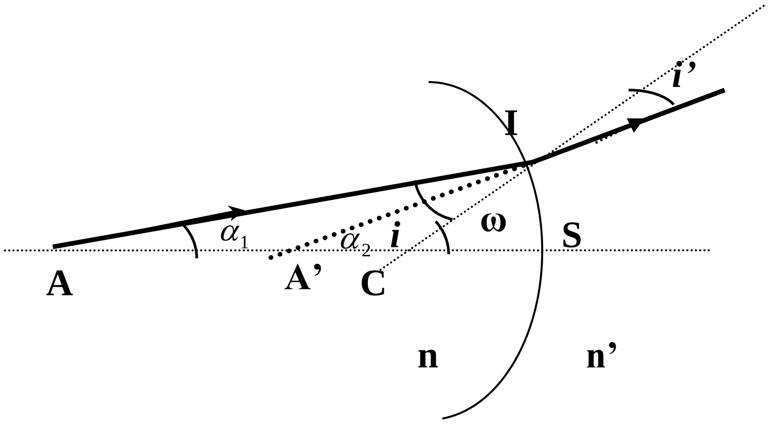
$$\text{D'où } \boxed{\overline{CA} = -\frac{n'}{n}\overline{CS}}.$$

Nous avons aussi $\overline{CA}.\overline{CA'} = \overline{CS}^2$ et $\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \left(\dfrac{n}{n'}\right)^2$

Les deux relations trouvés ci-dessus définissent la position des points conjugués A et A', rigoureusement stigmatiques pour le dioptre sphérique ; ce couple de point est unique, ce sont les points de Weirstrass.

IV. Stigmatisme approché

a. Stigmatisme approché dans les conditions de Gauss



Reprenons l'expression de l'invariant du dioptre $\boxed{n\dfrac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n'\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}}$, et considérons des rayons peu inclinés sur l'axe du dioptre alors α_1 et α_2 sont petits.

1. relation de conjugaison dans les conditions de Gauss

1. Origine au sommet

$n\dfrac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n'\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}} \Longrightarrow n\dfrac{\overline{CS}+\overline{SA}}{\overline{SA}} = n'\dfrac{\overline{CS}+\overline{SA'}}{\overline{SA'}}$, en divisant par CS $n\left(\dfrac{1}{\overline{SA}} + \dfrac{1}{\overline{CS}}\right) = n'\left(\dfrac{1}{\overline{SA'}} + \dfrac{1}{\overline{CS}}\right)$ d'ou la relation de conjugaison

$$\boxed{\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}}$$

Posons , $\overline{SA'} = p'$ et $\overline{SC} = R$ la relation précédente s'écrit

$$\boxed{\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'-n}{R}}$$

Formule de Descartes

2. Origine au centre

Reprenons l'équation de l'invariant du dioptre, on a $n\dfrac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n'\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$, en l' inversant, on aura $n\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{CA'}} = n'\dfrac{\overline{SA}}{\overline{CA}}$ qu'on peut écrire sous la forme $n\dfrac{\overline{SC}+\overline{CA'}}{\overline{CA'}} = n'\dfrac{\overline{SC}+\overline{CA}}{\overline{CA}}$ en divisant par *SC* nous obtenons la relations de conjugaison avec origine au centre. $\boxed{\dfrac{n}{\overline{CA'}} - \dfrac{n'}{\overline{CA}} = \dfrac{n-n'}{\overline{CS}}}$

3. Foyers - convergence

a. foyer image

Par définition, le foyer image F'est le conjugué du point objet à l'infini sur l'axe. Pour trouver sa position, on fait tendre *SA* vers l'infini dans la relation de conjugaison avec origine au sommet, ce qui donne

$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$ (*SA* tend vers l'infini alors $\overline{SA'} = \overline{SF'} = f'$: distance focale image

$\frac{n'}{\overline{SF'}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$ D'où $\overline{SF'} = \overline{SC}.\frac{n'}{n'-n}$ où encore $\boxed{f' = \frac{n'R}{n'-n} = \frac{n'}{C}}$

$\boxed{C = \frac{n'-n}{R}}$ est appelé vergence, c'est une caractéristique du dioptre sphérique , l'unité de C et la dioptrie (δ).la quantité *SF'* (attention au signe) notée *f' est appelée distance focale image.*

b. foyer objet

le foyer objet F est tel que son conjugué est à l'infini sur l'axe optique ; on a donc

$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$, lorsque $\overline{SA'} \to \infty$ on a $\overline{SA} \to \overline{SF} = f$: distance focal objet $-\frac{n}{\overline{SF}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$,

$$\boxed{f = -\frac{nR}{n'-n} = -\frac{n}{C}}$$

c. relation entre les distances focales

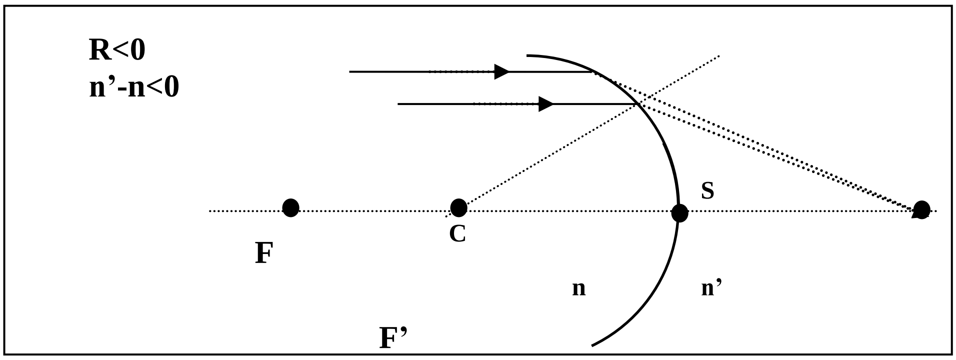
$\frac{\overline{SF}}{\overline{SF'}} = \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$ **et** $f + f' = R$

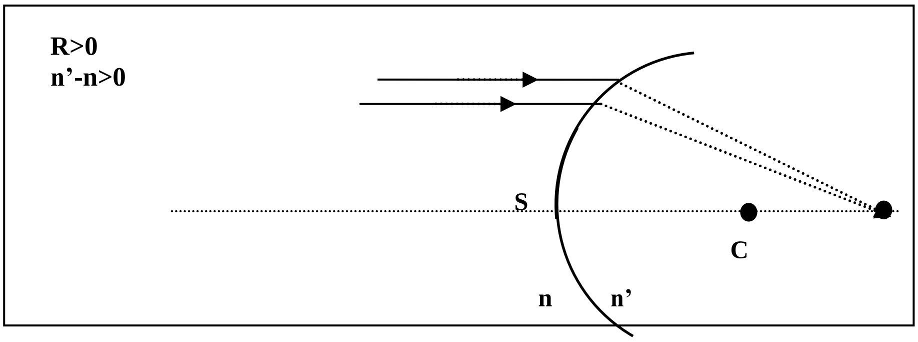
Ainsi les deux foyers *f* et *f'* sont situés à la même distance de S et C respectivement ; de plus ils sont situés de part et d'autre de S (*SF* et *SF'* sont de signes contraires).

d. convergence

Si le foyer image d'un dioptre est réel, tous les rayons incidents parallèles à l'axe convergent en *F'*, ce dioptre à foyers réels est convergent. Si les foyers sont virtuels le dioptre est dit divergent .
Différents cas de figures possibles suivant que $R > 0$ où $R < 0$ et que $n' > n$ où $n' < n$

- ***R* et $n'-n$ de même signe**

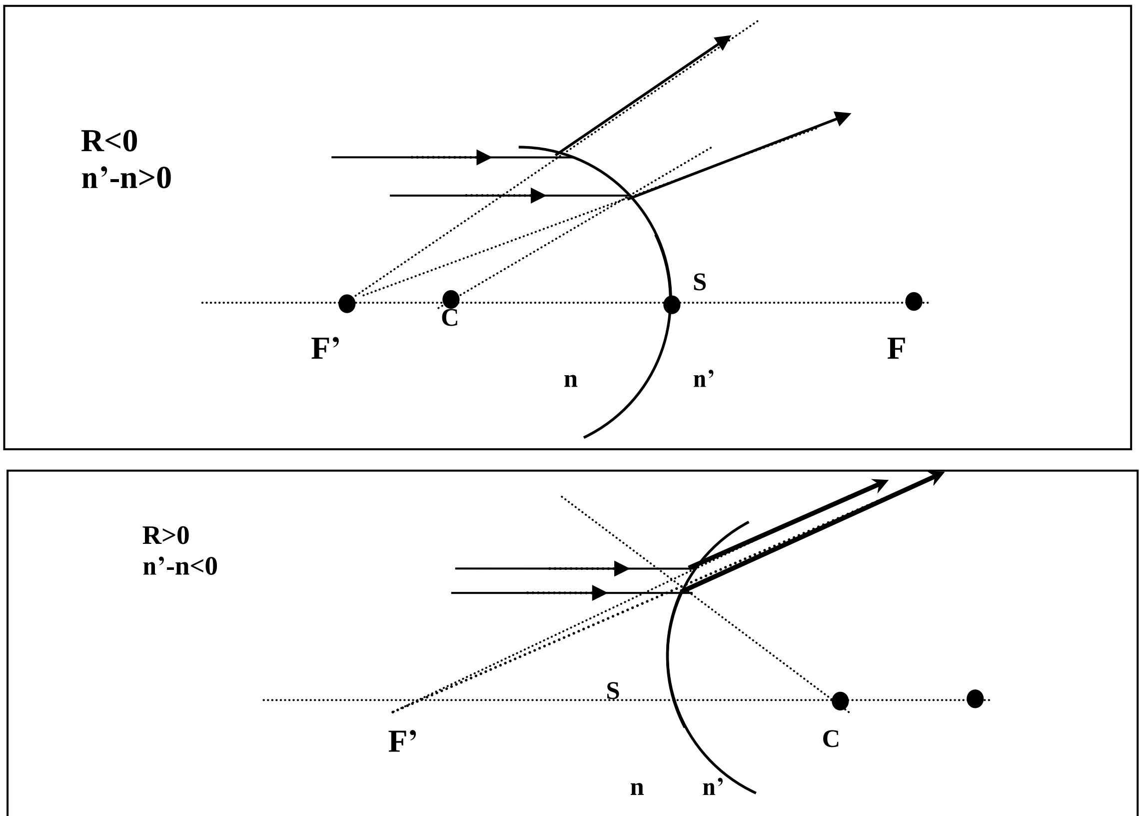




Dioptres convergents **F'**

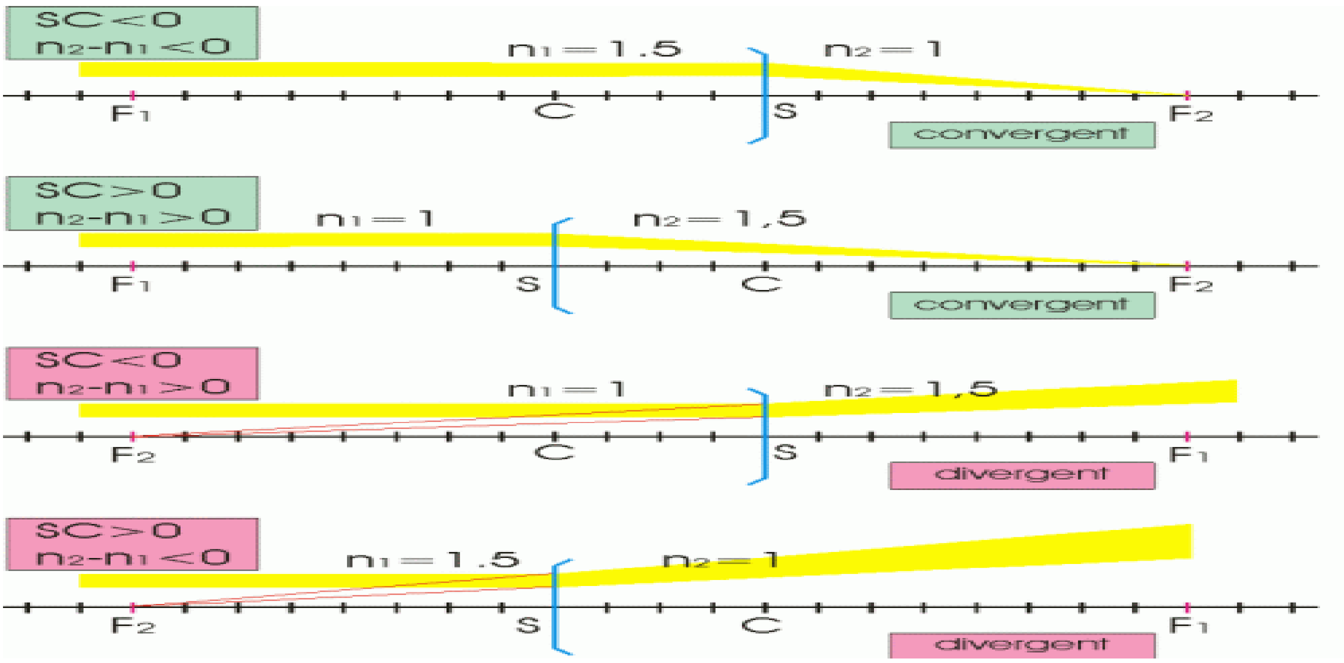
$f' = \overline{SF'} > 0 \Longrightarrow f < 0$ car $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$

- R **et** $n'-n$ **sont de signes contraires**



Dioptres divergents

L’examen de ces figures montre que le centre d’un dioptre convergent est situé dans le milieu le plus réfringent et que celui d’un dioptre divergent est situé dans le milieu le moins réfringent**.**



4. Formule de conjugaison avec double origine aux foyers

En divisant les deux membres de la relation $\boxed{\frac{n'}{p'}-\frac{n}{p}=\frac{n'-n}{R}}$ par la convergence C, il vient

$\frac{\frac{n'}{C}}{p'}+\frac{-\frac{n}{C}}{p}=1$ soit

$$\frac{f'}{p'}+\frac{f}{p}=1$$

Sachant que $\overline{SA}=p$, $\overline{SA'}=p'$, $\overline{SF}=f$ et $\overline{SF'}=f'$, $\overline{SC}=R$

Posons $x=\overline{FA}$ et $x'=\overline{F'A'}$, *on a :*

$p=\overline{SA}=\overline{SF}+\overline{FA}=f+x$

$p'=\overline{SA'}=\overline{SF'}+\overline{F'A'}=f'+x'$ **et** $\frac{f'}{f'+x'}+\frac{f}{f+x}=1$,

Soit

$$xx'=ff'\text{, }\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'}=f.f'}$$

Relation de conjugaison de Newton : elle montre que x et x' sont toujours de signes opposés.

5. construction géométrique

a. Image d'un objet AB perpendiculaire à l'axe

On reconnaît sur cette figure les rayons particuliers BI, BFJ et BC et les réfractés correspondants qui se coupe en B'. A'B' est perpendiculaire à l'axe.

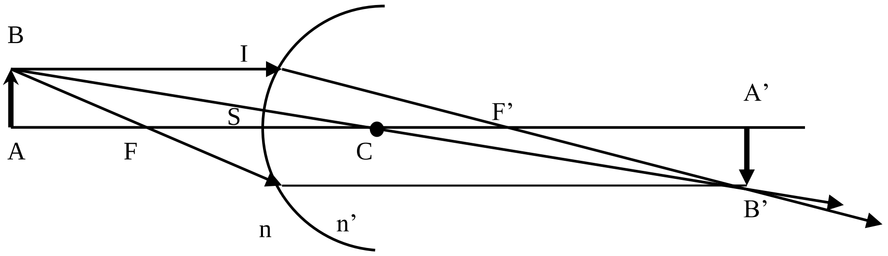
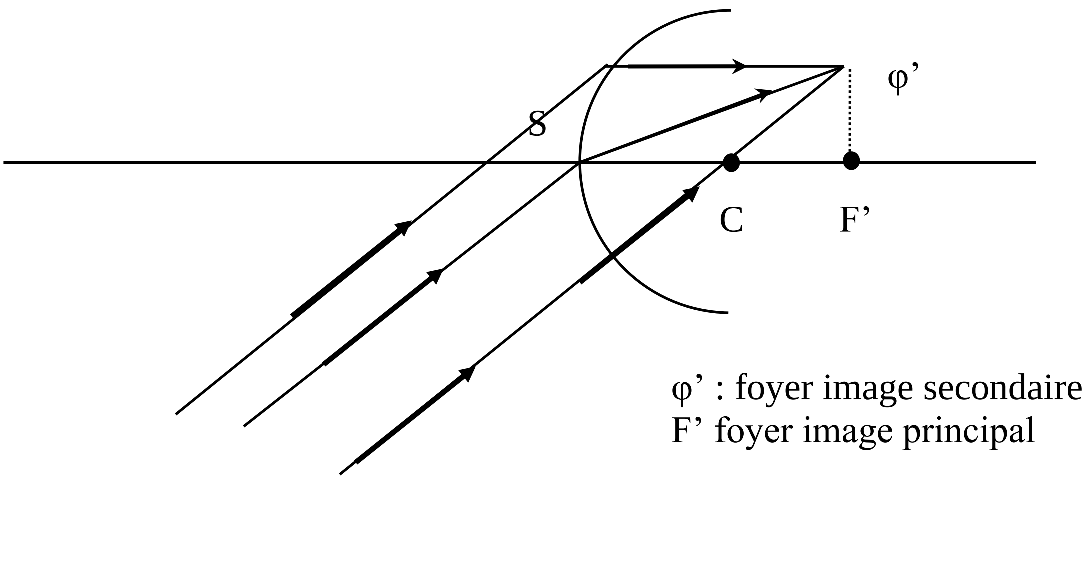


Image d'un objet AB

Le rayon qui passe par le centre du dioptre n'est pas dévié et un rayon qui est parallèle à l'axe principal en sort en passant par le foyer image F'

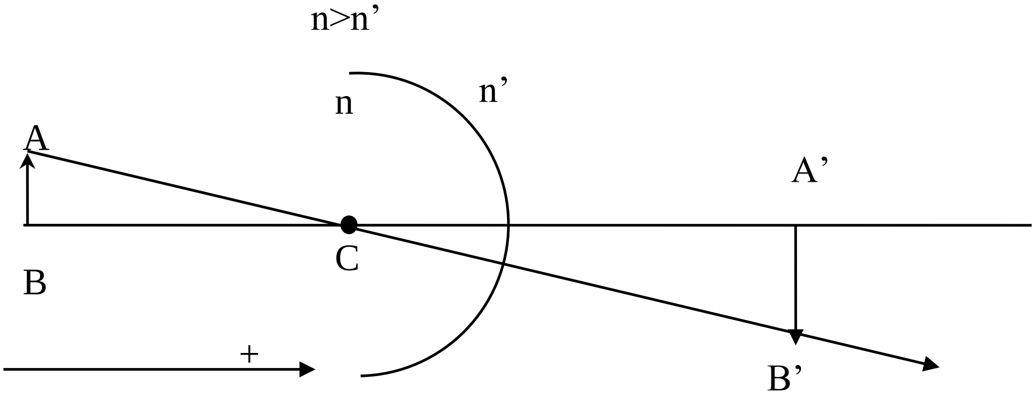
b. Image d'un point à l'infini à l'écart de l'axe optique :



6. Grandissement linéaire

C'est le rapport d'une dimension linéaire de l'image à la dimension correspondante de l'objet $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

a. origine centre



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

b. origine au sommet

En partant de la relation d'invariance dans les conditions de Gauss ($n\frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n'\frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$) on trouve

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{p'}{p}$$

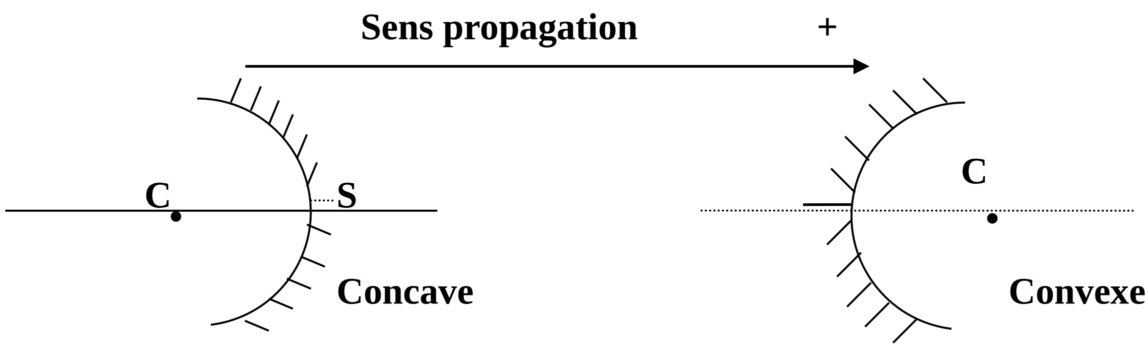
c. double origines aux foyers

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x}$$ Car ($x.x' = f.f'$)

V. Etude du miroir sphérique

1- Définition

C'est une portion de sphère réfléchissante.
Miroir concave : la face réfléchissante est du côté de centre C.
Miroir convexe : la face réfléchissante est du côté opposé de C.



2- Stigmatisme

Nous avons vu que le miroir peut être traité comme un dioptre dans lequel l'indice du milieu image est égale et opposé à l'indice du milieu objet $n' = -n$ il suffit de reprendre les résultats obtenus pour le dioptre sphérique en se plaçant dans ce cas particulier.

a. stigmatisme rigoureux

Cas du dioptre sphérique

- centre
- les points appartenant au dioptre
- les points de weistrass

$$\begin{cases} \overline{CA} = -\dfrac{n'}{n}\overline{CS} \\ \overline{CA'} = -\dfrac{n}{n'}\overline{CS} \end{cases}$$

Cas du miroir sphérique

- centre
- les points du miroir sphérique
- les points de weistrass conduisent au sommet qui n'est qu'un point du miroir sphérique.

b. stigmatisme approché

Comme dans le cas du dioptre sphérique, il y a stigmatisme approché si l'on se place dans les conditions de Gauss et pour des objets de petites dimensions.

2. Foyers

Cas du dioptre sphérique

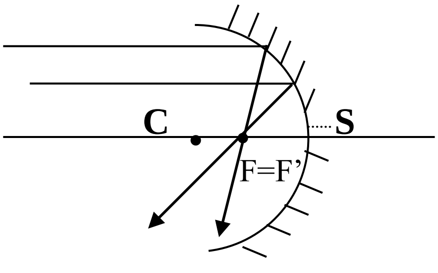
$$f = -\frac{nR}{n'-n} = -\frac{n}{C}$$

$$f' = \frac{n'R}{n'-n} = \frac{n'}{C}$$

Cas du miroir sphérique

$$f = \frac{R}{2},\ f' = \frac{R}{2} \text{ et } \overline{SC} = R$$

$$\text{Donc } f = f' = \frac{R}{2}$$



3. Relations de conjugaison

Origine au sommet

Dioptre sphérique

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$$

Posons $\overline{SA} = p$, $\overline{SA'} = p'$ et $\overline{SC} = R$ $\quad \dfrac{n'}{p'} - \dfrac{n}{p} = \dfrac{n'-n}{R}$

Miroir sphérique

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{R}$$

Origine au centre

Dioptre sphérique

$$\boxed{\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}}$$

Origines aux foyers

Dioptre sphérique

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f'}$$

Miroir sphérique

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = f^2}$$

4. Grandissement

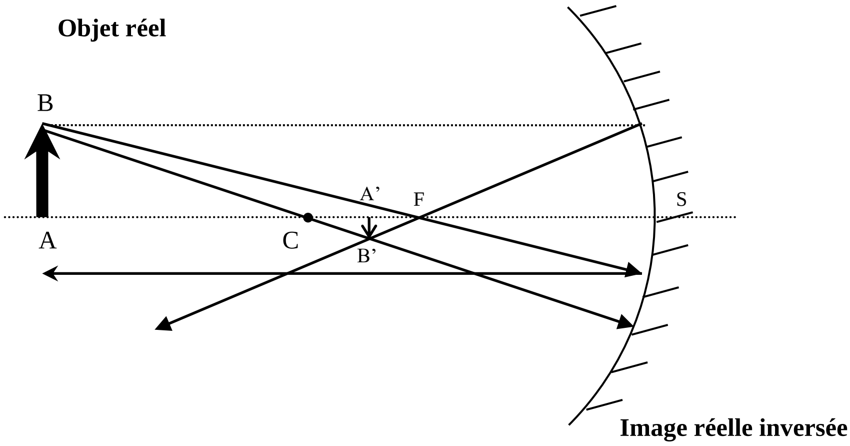
Dioptre sphérique

$\gamma = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \qquad \gamma = \dfrac{n}{n'}\dfrac{p'}{p} \qquad \gamma = -\dfrac{f}{x} = -\dfrac{x'}{f'}$

Miroir sphérique

$\gamma = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \qquad \gamma = -\dfrac{p'}{p} \qquad \gamma = -\dfrac{f}{x} = -\dfrac{x'}{f'}$

5. construction géométrique



6. **Tableau récapitulatif :**

	Dioptre sphérique	**Miroir sphérique**
Stigmatisme	- centre - les points appartenant au dioptre - les points de weistrass	- centre - les points du miroir sphérique
Foyers	$f=-\frac{nR}{n'-n}=-\frac{n}{C}$ $f'=\frac{n'R}{n'-n}=\frac{n'}{C}$	$f=f'=\frac{R}{2}$
Relations de conjugaison	**Origine au sommet** $\frac{n'}{\overline{SA'}}-\frac{n}{\overline{SA}}=\frac{n'-n}{\overline{SC}}$ **Origine au centre** $\boxed{\frac{n}{\overline{CA'}}-\frac{n'}{\overline{CA}}=\frac{n-n'}{\overline{CS}}}$ **Origines aux foyers** $\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'}=f.f'}$	**Origine au sommet** $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=\frac{2}{R}$ **Origine au centre** $\boxed{\frac{1}{\overline{CA'}}+\frac{1}{\overline{CA}}=\frac{2}{\overline{CS}}}$ **Origines aux foyers** $\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'}=f^2}$
Grandissement	$\gamma=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ $\quad\gamma=\frac{n}{n'}\frac{p'}{p}$ $\gamma=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}$	$\gamma=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ $\quad\gamma=-\frac{p'}{p}$ $\gamma=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f}$

Chapitre 5

SYSTEMES DIOPTRIQUES A FOYER

1. Introduction

Un système dioptrique est un système centré constitué par un ensemble de dioptres plan ou sphériques ; dans certains cas (lentilles épaisse par exemple), il peut être commode de déterminer l'image définitive *A'B'* de *AB* en considérant de proche l'action successive des différents dioptres. Mais le plus souvent nous avons intérêt à utiliser des points ou des plans possédant des propriétés particulières permettant la construction simple de rayons réfractés : c'est l'objet de ce chapitre.

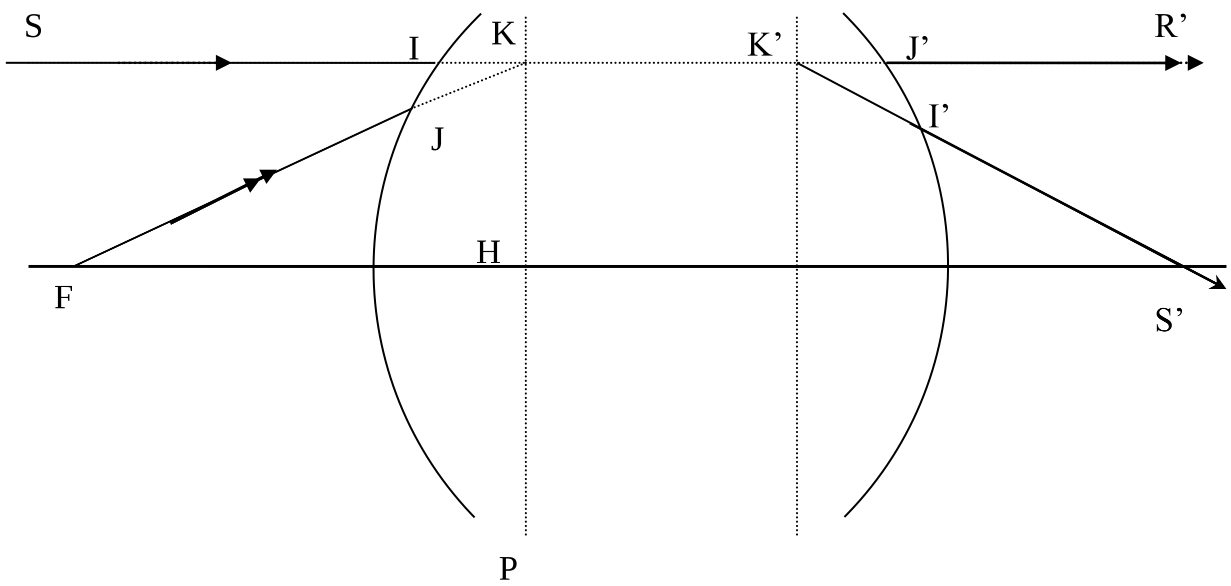
De la position des foyers résulte une distribution entre les systèmes centrés : s'ils sont à distance finie, le système est dit à foyer, dans le cas inverse, le système est afocal.

2. plans principaux

Soit *SI* un rayon incidents parallèle à l'axe. L'émergent *I'S'* (ou son prolongement correspondant passe par le foyer image *F'*

Soit K'

Soit *K'* l'intersection de ces rayons (ou de leurs prolongements). Par symétrie, *K'* situé sur une surface de révolution que nous allons confondre, dans les conditions de Gauss, avec son plan tangent, normal à l'axe et passant par *H'*. ce plan est appelé *principale image*, et *H'* le *point principale image*.



Le plan principale image est donc le lieu des points d'intersection des rayons incidents parallèles à l'axe avec les émergents correspondants. D'une façon analogue, le plan principal objet est le lieu des points d'intersection des rayons émergents parallèles à l'axe avec les incidents correspondants.

Les plans principaux possédant la propriétés fondamentales suivante : ils sont conjugués l'un de l'autre et le grandissement linéaire (ou transversale) est égale à 1.

En effet, soit *HK* l'objet placé dans le plan principal objet ; traçons les deux rayons passant par *K* indiqués sur la figure précédente; ces deux rayons se coupent en K' situé dans le plan principale image ; H'K' est l'image de HK ; De plus, cette figure montre que :

$$\overline{H'K'} = \overline{HK}$$

C'est à dire

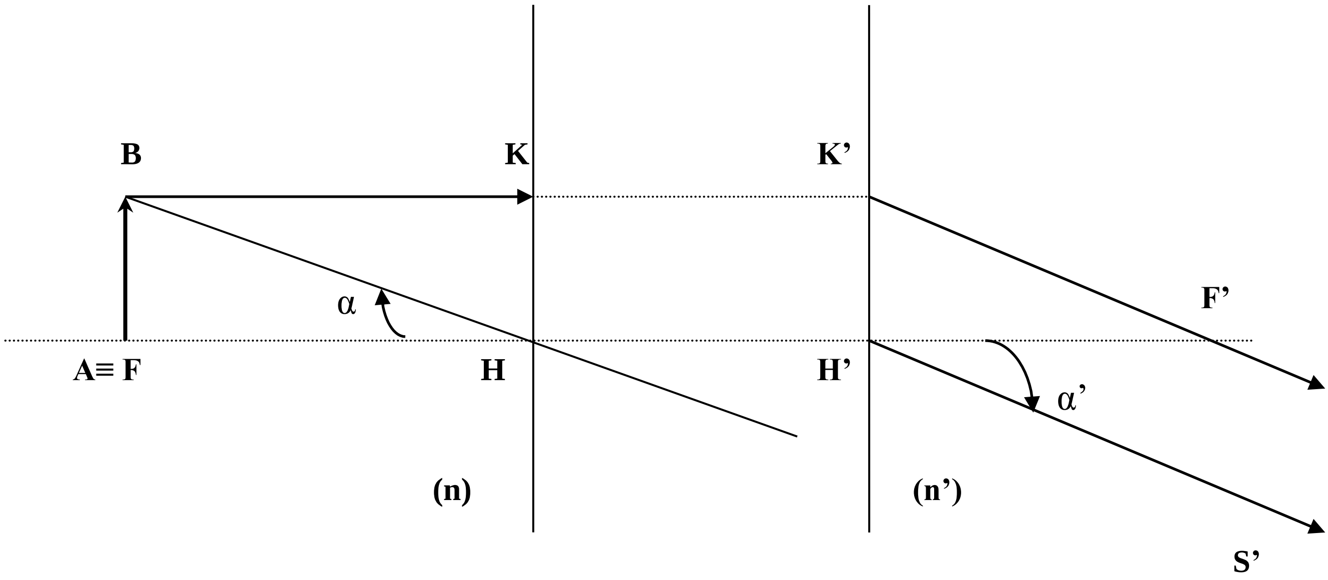
$$\frac{\overline{H'K'}}{\overline{HK}} = +1$$

3. distances focales - construction géométriques

par définition, les distances focales objets et image sont respectivement les grandeurs algébriques :

$$f = \overline{HF} \text{ et } f' = \overline{HF'}$$

a. **l'objet AB appartient au plan focal objet** (nos n'avons pas représenté les faces d'entrée et de sortie : une partie des rayons peut être virtuelle).



$K'F' // H'S'$

La formule de Lagrange Helmholtz appliquée au rayons conjugués *BH* et *H'S'* se réduit à :

$$\boxed{n\alpha = n'\alpha'} \text{ puisque } \overline{KH} = \overline{K'H'}$$

Or $\overline{FB} = \overline{HF}.\alpha = f\alpha$ et $\overline{H'K'} = \overline{H'F'}(-.\alpha') = -f'\alpha'$

Et comme $\overline{FB} = \overline{HF}.\alpha = f.\alpha$ il s'ensuit que

$$\boxed{\alpha.f = \alpha'.f'}$$

La division membre à membre de cette égalité par l'équation $\boxed{n\alpha = n'\alpha'}$ conduit à la relation fondamentale :

$$\boxed{\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}}$$

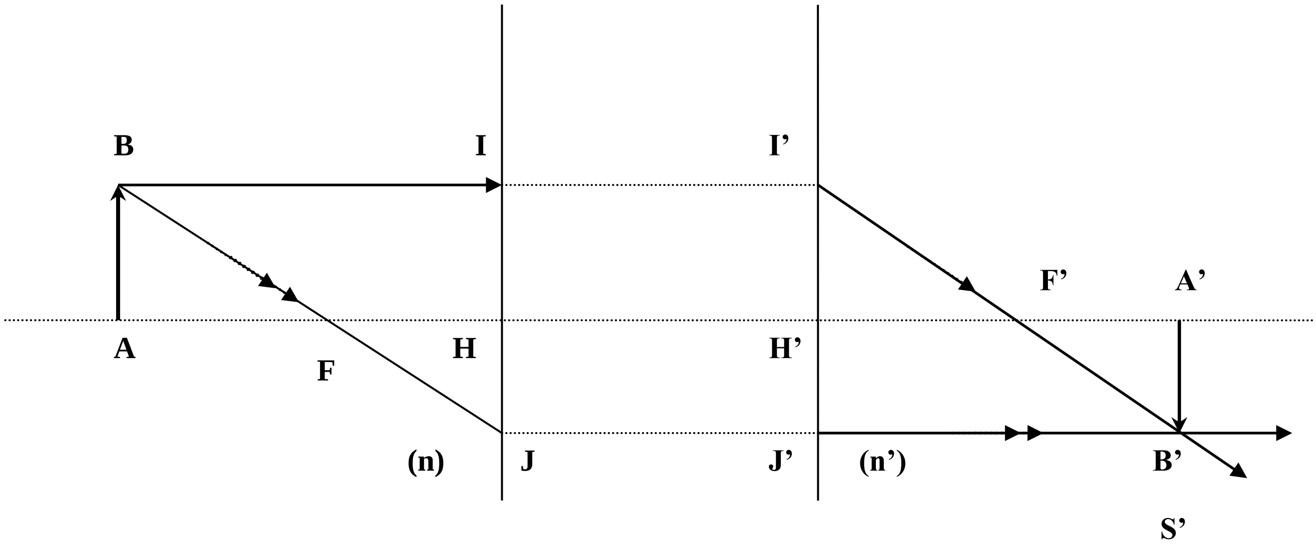
La définition de la vergence donnée pour les dioptres sphériques est valable pour les systèmes centrés. $\upsilon = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$

Quand la vergence est positive, le système est convergent ; quant elle est négative, le système est divergent.

Remarques

Une vergence positive prend le nom de convergence,, et une vergence négatif, le nom de divergence.

Construction d'une image connaissant F, F', H et H'



Le rayon *BI* // à l'axe principale donne lieu au rayon émergent *I'F'*.
Le rayon *BFJ* passant par le foyer objet donne lieu au rayon émergent *J'B'*// à l'axe principal. D'où la construction de *A'B'* image de *AB*.

Cas particuliers :

L'objet est dans le plan focal objet donne lieu à une image à l'infinie.
L'objet est à l'infinie donne lieu à une image dans le plan focal image.

4. formule de conjugaisons

1. double origine aux foyers

Examinons la figure précédente le triangle *BFA* et *FHJ* sont semblables, ce qui permet d'écrire

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{FA}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{f}{x}$$

De même, les triangles *H'T'F'* et *F'A'B'* étant semblables :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{x'}{f'}$$

Soit en égalent les deux expressions de γ

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f'} \text{ Formule de Newton}$$

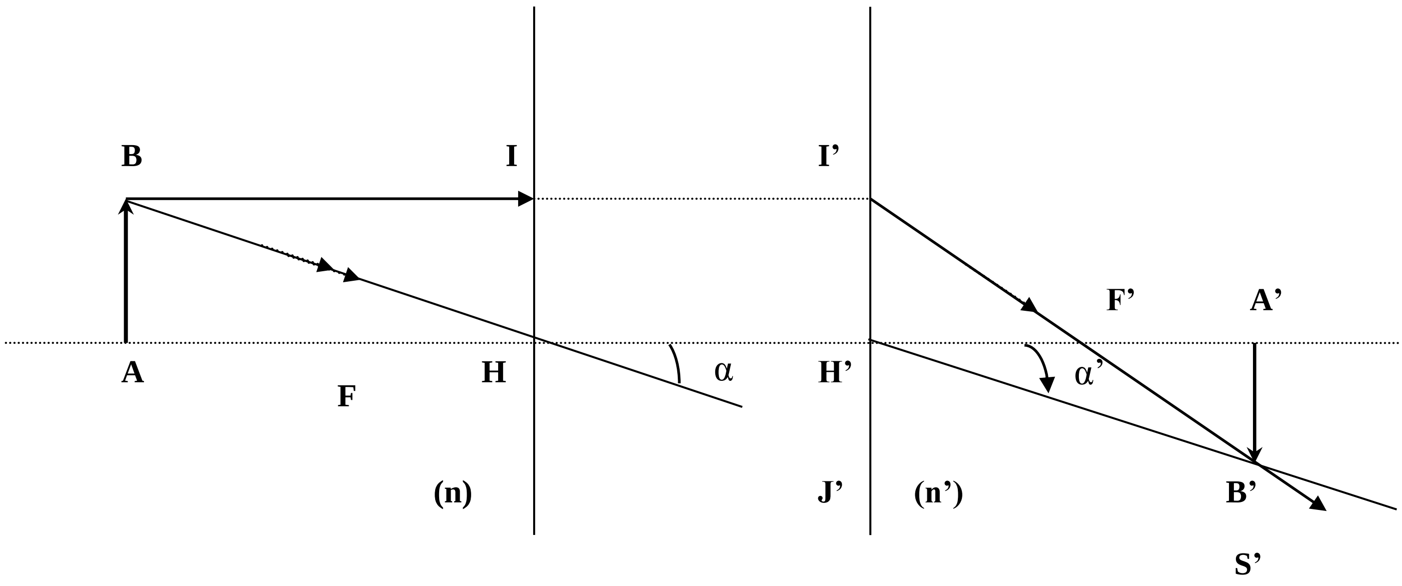
2. origines aux points principaux

on pose $p = \overline{HA}$ et $p' = \overline{H'A'}$

$\overline{FA} = \overline{FH} + \overline{HA} = -f + p$ et $\overline{F'A'} = -f' + p'$ d'après la formule de Newton : $(p-f)(p'-f') = f;f'$ et en divisant les deux membres par *pp'* on aura

$$\left(1-\frac{f}{p}\right)\left(1-\frac{f'}{p'}\right) = \frac{ff'}{pp'} \text{ où } 1 = \frac{f}{p} + \frac{f'}{p'}$$

Pour obtenir l'expression du grandissement, considérons la figure suivante :



La formule de Lagrange Helmholtz donne :

$$n.\overline{HI}.\alpha = n'.\overline{H'I'}.\alpha'$$

avec $\alpha \approx \dfrac{\overline{AB}}{\overline{HA}}$ et $\alpha' = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{H'A'}}$

comme $\overline{HI} = \overline{H'I'}$ (plans principaux) , la relation précédente s'écrit

$$n\frac{\overline{AB}}{\overline{HA}} = n'\frac{\overline{A'B'}}{\overline{H'A'}}$$

D'où

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n}{n'}.\frac{p'}{p}$$

Remarques :

- dans le cas où les milieux extrêmes sont identiques nous aurons :

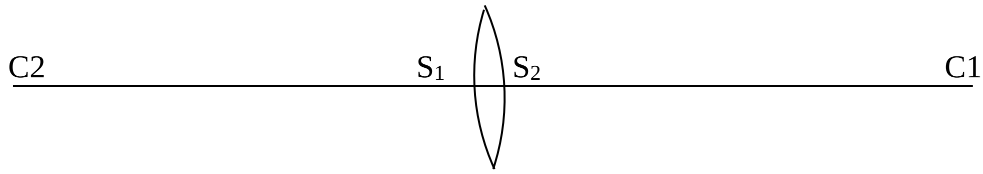
$$f' = -f, \gamma = \frac{p'}{p} \text{ et } \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

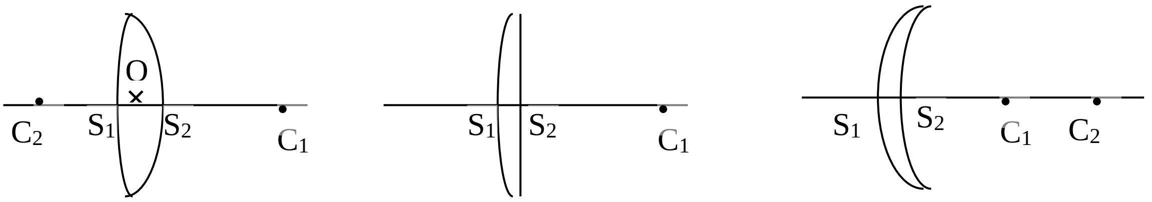
- il est facile de voir que les formules précédentes généralisent celles obtenus pour le dioptre sphérique ; les plans principaux du dioptre sont confondus avec les plans passant par le sommet S et perpendiculaire à l'axe optique.

5. Applications aux lentilles minces

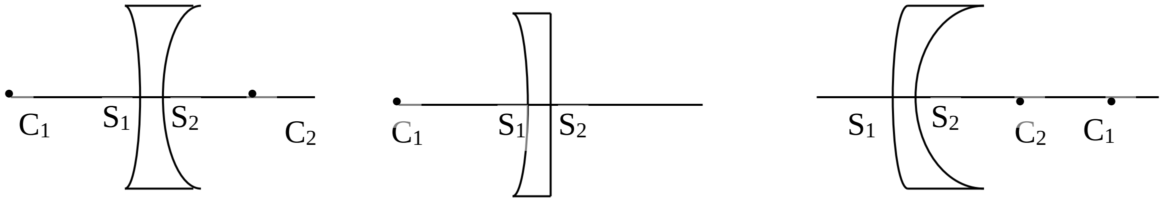
1-Définition :

On appelle lentilles minces, des systèmes centrés constitués d'un milieu transparent limité par deux dioptres dont l'un au moins est un dioptre sphérique dont les sommes sont pratiquement confondus en un point O (appelé centre optique de la lentille). Suivant les dispositions relatives de ces deux dioptres, on distingue les lentilles à bord mince (dont le pourtour est plus mince que le centre), et les lentilles à bord épais. L'axe principal de la lentille passe par les centres des dioptres.





biconvexe ***plan-convexe*** ***ménisque à bord mince***



biconcave ***plan concave*** ***ménisque à bords épais***

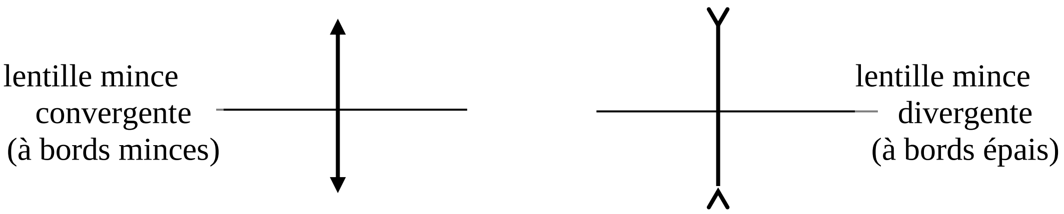
Les rayons de courbure des deux dioptres sont comptés algébriquement par rapport au sens de propagation de la lumière : $R_1 = \overline{S_1C_1}$ et $R_2 = \overline{S_2C_2}$

L'épaisseur de la lentille correspond à la longueur du segment S_1 S_2 qui sépare les sommets des deux dioptres sur l'axe du système.

Soit $e = \overline{S_1S_2}$ La distance entre ces deux sommets. Pour qu'une lentille puisse être considérée comme mince, il faut que les conditions suivantes soient simultanément satisfaites :
$e \ll |R_1|$; $e \ll |R_2|$ et $e \ll |R_1 - R_2|$

Lorsque ces conditions sont remplies, les sommets des deux dioptres sont considérés comme confondus avec le centre O de la lentille. ($S_1 \equiv S_2 \equiv O$)

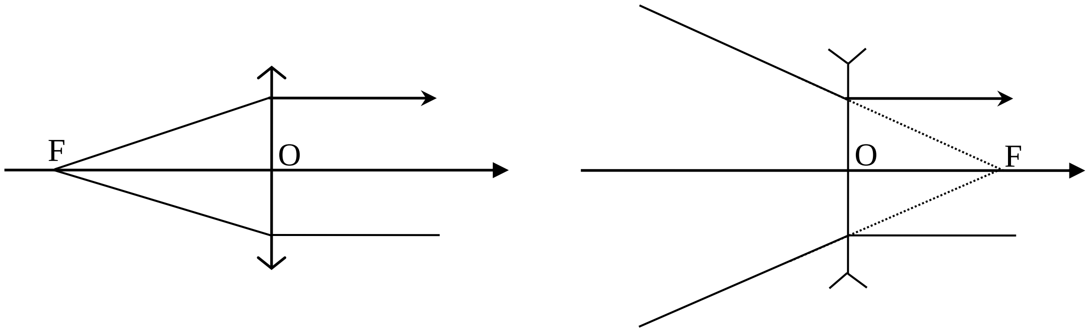
La ***représentation*** schématique d'une lentille mince est alors donnée par un segment de droite perpendiculaire à l'axe, et l'on représente la nature de la lentille (convergente ou divergente) comme ci-dessous.



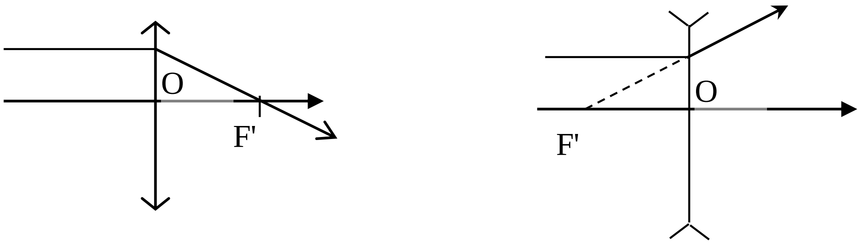
- ***Propriété*** : tout rayon passant par le centre O de la lentille n'est pas dévié.

1. **Foyers, plans focaux, distances focales**

On appelle ***foyer principal objet*** le point F de l'axe principale dont l'image est à l'infini sur l'axe.



L'expérience montre que F est réel pour une lentille convergente et virtuelle pour une lentille divergente.
On appelle *plan* ***focal objet*** le plan de front (perpendiculaire à l'axe en F).
La ***distance focale objet*** est la distance algébrique $f = \overline{OF}$
On appelle ***foyer principal image*** le point F' de l'axe principale où se forme l'image d'un point objet à l'infini sur l'axe.

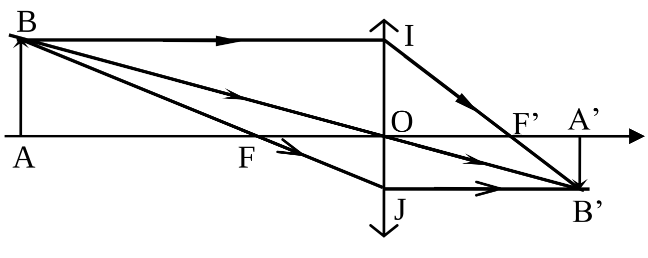


La ***distance focale image*** est la distance algébrique $f' = \overline{OF'}$
On se limite dans cette étude au cas où ***la lentille est placée dans l'air*** dont l'indice égale à 1.
Dans ce cas, les foyers principaux sont symétriques par rapport à la lentille, c'est-à-dire : $f' = -f$.

La vergence d'une lentille est l'inverse de la distance focale image D = $\frac{1}{f'}$. Elle s'exprime en dioptries (δ). La vergence d'une lentille convergente est positive, celle d'une lentille divergente est négative.

Image d'un petit objet plan perpendiculaire à l'axe

Dans le cas de l'approximation de Gauss, un petit objet plan et perpendiculaire à l'axe a une image perpendiculaire à l'axe de la lentille.
Considérons un objet AB quelconque, que nous représenterons par une flèche (Le plus simple pour déterminer la position de l'image A'B' consiste à construire l'image B' de B. Le point A' se déduit de B' en traçant la ligne perpendiculaire à l'axe passant par B'.



Pour obtenir l'image B', il suffit de considérer deux rayons différents issus de B, de chercher leur marche à travers la lentille : l'intersection des rayons émergents détermine B'

2- Formule de conjugaison et de grandissement

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \text{ et } \gamma = \frac{p'}{p}$$

avec $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$

La relation $\gamma = \frac{p'}{p}$ montre que le rayon passant par le centre optique n'est pas dévié. Cette propriété est particulièrement utile pour effectuer la construction des images.

les formules de newton s'écrivent : ($x = \overline{FA}$ et $x' = \overline{F'A'}$)

$$x.x' = -f^2 = -f'^2 \text{ et } \gamma = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

Remarques

Nous avons écris les formules de conjugaisons d'une lentille mince à partir des résultats généraux. Cependant, pour obtenir la position de l'image A' d'un objet A sur l'axe, nous aurions pu appliquer deux fois la formule de conjugaison des dioptres en considérant l'image intermédiaire A_1 que le premier dioptre donne de A.

$$\underset{(1)}{\mathbf{A}} \xrightarrow{\mathbf{DS_1}} \underset{(n)}{\mathbf{A_1}} \xrightarrow{\mathbf{DS_2}} \underset{(1)}{\mathbf{A'}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{n}{\overline{SA_1}} - \dfrac{1}{\overline{SA}} = \dfrac{n-1}{\overline{SC_1}} \\ \dfrac{1}{\overline{SA'}} - \dfrac{n}{\overline{SA_1}} = \dfrac{1-n}{\overline{SC_2}} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{SC_1}} - \frac{1}{\overline{SC_2}}\right)$$

Or $\overline{SA} = \overline{OA} = p$ et $\overline{SA'} = \overline{OA'} = p'$

—La relation précédente s'écrit $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ avec $\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$